

DOI: 10.11835/j.issn.2096-6717.2025.033



开放科学(资源服务)标识码 OSID:



铁路列车-桥梁共振与消振研究综述

王志鲁^{1a,2}, 陈雷^{1a}, 杨永斌^{1a}, 檀忠旭^{1b}, 曾清², 王英杰³

(1. 重庆大学 a. 土木工程学院; b. 航空航天学院, 重庆 400045; 2. 广东省土木工程智能韧性结构重点实验室, 广东 深圳 518055; 3. 北京交通大学 土木建筑工程学院, 北京 100044)

摘要: 共振显著加剧列车与桥梁结构的振动, 不仅加速桥梁轨道系统的疲劳失稳, 还影响列车运行的安全性和舒适性。在设计阶段有效避免共振、在服役阶段有效控制共振是确保高速铁路交通健康可持续发展的关键。通过系统回顾和梳理铁路列车与桥梁系统中共振与消振问题的研究进展, 全面总结共振的发生机理和规律, 明确消振设计与控制方法。内容包括桥梁共振与消振的基本理论、列车激励模型、不同结构形式桥梁的共振与消振问题、影响共振与消振的主要因素以及桥梁共振控制与现场试验研究等 6 个方面。文献回顾表明: 桥梁共振与消振条件受到边界条件的显著影响, 其表现通常与简支梁工况一致或略有差异; 桥梁跨径与列车编组构成典型的双周期特性, 当桥梁引发列车的共振速度与列车引发桥梁的共振速度一致时, 可能诱发列车-桥梁“双共振”现象; 车桥耦合效应会降低桥梁的共振幅值, 其随机性还可能导致“随机共振”发生; 在简支梁中, 一阶模态主导共振位移响应, 二阶模态对共振加速度的影响显著, 高阶模态的影响通常可忽略不计; 对于连续梁结构, 二阶模态对共振位移的贡献通常较大, 不可忽视; 桥梁阻尼虽然能有效降低共振幅值, 但可能引发“消振泄漏效应”。在消振措施方面, 当桥跨长度 L 为列车特征长度 d 的 1.5 倍时, 第一阶共振显著减弱, 这为铁路桥梁的最佳跨径设计提供了重要依据; 此外, 通过设置桥梁频率下限或调整列车编组结构等措施, 亦可主动规避共振条件。大量实测结果证实, 铁路桥梁的共振主要以第一阶竖弯模态共振为主, 并与列车运行速度和列车特征长度(即 v/d) 呈显著相关性。

关键词: 车桥耦合; 铁路桥梁; 共振; 消振

中图分类号: U446.3

文献标志码: A

文章编号: 2096-6717(2026)05-0205-20

State-of-the-art review on resonance and cancellation in train-bridge coupled dynamics

WANG Zhilu^{1a,2}, CHEN Lei^{1a}, YANG Yeongbin^{1a}, TAN Zhongxu^{1b}, ZENG Qing²,
WANG Yingjie³

(1a. School of Civil Engineering; 1b. College of Aerospace Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China; 2. Guangdong Provincial Key Laboratory of Intelligent and Resilient Structures for Civil Engineering, Shenzhen 518055, Guangdong, P. R. China; 3. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, P. R. China)

收稿日期: 2024-12-12

基金项目: 国家自然科学基金(52478137); 广东省土木工程智能韧性结构重点实验室开放课题(2023B1212010004); 重庆市建设科技计划(城科字 2023 第 5-12 号)

作者简介: 王志鲁(1990-), 男, 博士, 副教授, 博士生导师, 主要从事车-桥动力耦合研究, E-mail: zhlwang@cqu.edu.cn。
檀忠旭(通信作者), 女, 博士, 副教授, E-mail: tanzhongxu@cqu.edu.cn。

Received: 2024-12-12

Foundation items: National Natural Science Foundation of China (No. 52478137); Open Project Program of Guangdong Provincial Key Laboratory of Intelligent and Resilient Structures for Civil Engineering (No. 2023B1212010004); Chongqing Construction Science and Technology Plan Project (No. 2023-5-12)

Author brief: WANG Zhilu (1990-), PhD, associate professor, doctoral supervisor, main research interest: vehicle-bridge interaction dynamics, E-mail: zhlwang@cqu.edu.cn.

TAN Zhongxu (corresponding author), PhD, associate professor, E-mail: tanzhongxu@cqu.edu.cn.

Abstract: Resonance can lead to excessive vibration of trains and bridge structures, exacerbating fatigue and instability in bridge-track structures, further affecting the comfort and safety of train operations. Effectively eliminating resonance during the design phase and controlling resonance during service are crucial for ensuring the sound and sustainable development of high-speed railway transportation. This paper aims to review the research progress on resonance and cancellation issues of railway train/bridge systems, systematically summarize the mechanisms and patterns of resonance occurrence, and clarify cancellation design and resonance control methods. The paper covers six parts: the basic theory of bridge resonance and cancellation, train excitation models, resonance and cancellation issues of bridges of different types, major influential factors of bridge resonance and cancellation, bridge resonance control, and field experimental research. A review of the literature indicates that the conditions for bridge resonance and cancellation are influenced by boundary conditions, but generally coincide with or slightly differ from those of simply supported beams. Bridge spans and train compositions form typical bi-periodicity, which potentially results in “dual resonance” when the bridge-induced train resonance speed is equal to the train-induced bridge resonance speed. The coupling effect between trains and bridges reduces the resonance amplitude of bridges, but the actual train-bridge coupling system is stochastic and may lead to “random resonance”. For simply supported beams, the first mode dominates the resonance displacement, while the second mode has a significant impact on resonance acceleration, and higher-order mode effects can generally be ignored. For continuous beams, the second mode also generally contributes significantly to resonance displacement and cannot be therefore ignored. Damping in bridges can effectively reduce resonance amplitudes but may also cause “leaking effects” for cancellation. Regarding the cancellation measures, when the bridge span length L is 1.5 times the characteristic length d of the train, the first-order resonance of the bridge can be effectively eliminated, which serves as the optimal span design criterion for railway bridges. Furthermore, resonance conditions can also be actively avoided by setting lower frequency limits for bridges and changing train compositions. Results from extensive field tests indicate that the resonance of railway bridges is predominantly characterized by the first-order vertical bending mode. This resonance shows a significant correlation with the train speed and train length (i.e., v/d).

Keywords: vehicle-bridge interaction; railway bridge; resonance; cancellation

对移动列车荷载致桥梁振动问题的研究可追溯至19世纪中叶。Stokes^[1]通过调研英国查斯特铁路桥坍塌事故,首次发现了移动列车荷载在桥梁结构中引发的周期性动态冲击效应及其对桥梁-车辆耦合系统的安全影响,由此开创了现代轨道交通工程中车-桥动力相互作用研究的先河。随后,在铁路桥梁的动态测试中发现,试验车移动速度的增加会放大桥梁响应。大约一个世纪后,世界上第一条高速铁路——日本东海道新干线(东京至大阪)开通营业,全程515.4 km,列车最高运营速度210 km/h。

自20世纪60年代开始,学者逐渐开始关注铁路列车作用下的桥梁共振理论。Bolotin^[2]对受一系列等间距 d 、匀速 v 运动的质量块加载工况的简支梁进行了理论初探,指出载荷的重复周期 d/v 是激励梁产生共振的关键因素。随后,Frýba^[3]提出了移动荷载作用下的简支梁共振临界速度表达式 $v_r = f_b \cdot d$; Matsuura^[4]建立了桥梁共振频率的表达式 $f_b = jv/d|_{j=1,2,3,\dots}$,但对于铁路桥梁可能出现的最大共振机制仍缺乏完整的论述。

1981年,法国高速列车(TGV)在巴黎与里昂之间开通。根据Ramondenc^[5]的现场试验,TGV列车以192 km/h的速度通过时,在长度为38 m的简支梁桥上观察到了响应放大的共振现象。实测共振速度与Frýba^[3]提出的共振临界速度表达式基本吻合。Goicolea-Ruigómez^[6]在西班牙马德里—塞维利亚线的Tajo桥(跨长 $L=38$ m、频率 $f_b=3.3$ Hz)上进行了现场试验,发现当单节车长 $d=18.7$ m的AVE列车组速度达到219 km/h时桥梁发生了共振,这与计算得到的共振速度 $v_r = f_b \cdot d=222$ km/h接近。欧洲铁路研究所(ERRI)^[7]将速度 $v_r = f_b \cdot d$ 作为共振速度,以指导速度350 km/h的高速铁路桥梁设计,并采用欧洲规范^[8]来解释列车荷载通过简支梁桥时的动力效应。

自20世纪90年代以来,随着中国高速铁路的起步与发展,Yang等^[9]围绕车-桥动力耦合开展了深入的理论研究,研究内容覆盖车辆对公路桥梁的动力冲击^[10-11]与列车致铁路桥梁振动^[12-13]等问题。特别是,Yang等^[12]首次通过数学解析方式推导出简支

梁在一系列等间距移动荷载作用下的动力响应闭合解,并定义了无量纲的速度参数 $S=\pi v/\omega L$ (ω 为桥梁圆频率、 L 为跨长、 v 为车速),基于此参数系统性推导出桥梁共振和消振条件。此外,还提出了通过使消振条件等于共振条件的设计方法,得出桥梁振动幅值最小的最佳跨长准则—— $(L/d)_{\text{opt}}=1.5$ (铁路桥梁最佳跨度 L 为 1.5 倍列车特征长度 d),从而有效避免第一阶共振的发生。随后, Museros 等^[14]通过研究 ICE2 列车通过时简支铁路桥的动态响应发现,某些 40 m 长、 $L/d=40/26=1.52$ 桥梁的共振显著减少,恰好符合 Yang 等^[12]提出的最佳跨长准则。此外, Cho 等^[15]发现,该跨长准则已被应用于韩国高铁桥梁的结构设计,并被认为是—种经济高效的消振手段。Yang 等^[16]进一步总结了简支铁路桥梁最佳跨长准则的应用现状,为该领域的研究提供了重要参考。

近 20 年来,随着高速铁路列车的持续提速发展,铁路车-桥耦合振动问题,尤其是共振与消振现象,受到了学者的广泛关注^[17]。研究表明,在共振条件下,列车、轨道和桥梁结构的动力响应会显著增加,长期累积可能导致轨道和桥梁内部产生疲劳损伤,甚至引发结构破坏^[18]。此外,过大的位移响应还可能影响列车的平稳性和运行安全^[19]。在设计阶段有效规避共振并在服役阶段有效控制共振,是保障高速铁路交通健康可持续发展的关键。

笔者通过系统回顾和梳理围绕铁路桥梁共振与消振问题的研究进展,从桥梁共振与消振的基本理论、列车激励模型的发展、不同结构形式桥梁的共振与消振研究、桥梁共振与消振的主要影响因素以及桥梁共振控制与现场试验研究等 6 个方面总结铁路桥梁共振与消振的现象与规律。

1 列车激励下桥梁共振与消振的基本理论

列车荷载具有显著的周期性特征,当荷载的某一频率与桥梁的任一固有频率一致时,桥梁的振动响应将显著放大,从而引发共振。相反,在特定条件下,列车引起的桥梁振动在传播过程中可能相互抵消,从而形成消振现象。在数学上,共振与消振条件对应桥梁响应的最大值和最小值条件,因此,准确推导桥梁位移响应是确定这些条件的前提。为此, Wang 等^[20]提出了简支梁在连续移动荷载作用下多阶模态叠加的归一化模态坐标表达式,该表达式能准确描述复杂荷载下桥梁的动力响应,尤其是

在多模态耦合情况下提供更精确的响应预测。基于该表达式, Wang 等^[20]不仅推导了经典的共振、消振条件,还提出了“内部消振条件”的概念,为共振与消振研究提供了新的理论视角。

如图 1 所示,列车荷载被模拟为一系列等间距移动荷载,荷载间距为列车车厢的特征长度 d ,荷载速度恒定为 v ,荷载幅值为 P 。作用于桥梁上的荷载为

$$F(x, t) = P \sum_{k=1}^N \delta[x - v(t - t_k)] [H(t - t_k) - H(t - t_k - \Delta_t)] \quad (1)$$

式中: $\delta(x)$ 为狄拉克函数; $H(x)$ 为单位阶跃函数; $t_k = (k-1)d/v$ 表示第 k 个荷载上桥时刻; $\Delta_t = L/v$ 为每个荷载通过桥梁所用时间; $H(t - t_k) - H(t - t_k - \Delta_t)$ 表示第 k 个荷载正作用于桥上。

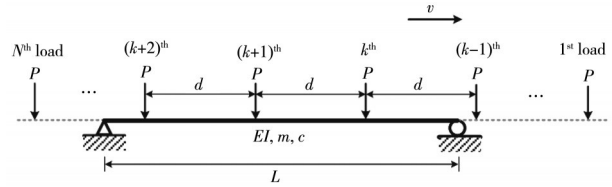


图1 简支梁受等移动荷载列作用的力学模型

Fig. 1 Mechanical model for simply-supported beam subjected to sequential moving loads

1.1 简支梁自由振动闭合解

采用 Bernoulli-Euler 简支梁模型,其在移动荷载作用下的动力平衡方程为

$$\bar{m}\ddot{u} + c\dot{u} + EIu''' = F(x, t) \quad (2)$$

式中: E 为简支梁的弹性模量; I 为截面惯性矩; $\bar{m}$ 为单位长度质量; L 为桥梁长度; u 为桥梁的竖向位移。

在高铁列车荷载瞬时作用下,简支梁的竖向振动由第一阶模态控制^[12]。因此,采用模态叠加法,桥梁的竖向位移可近似表示为

$$u(x, t) \approx \phi(x)q(t) \quad (3)$$

式中: $q(t)$ 为广义模态坐标; $\phi(x) = \sin(\pi x/L)$, 为简支梁的第一阶振型。在式(2)的左右两边同时乘 $\phi(x)$ 并沿梁长 L 进行积分,方程可转化为

$$\ddot{q}(t) + 2\xi\omega\dot{q}(t) + \omega^2q(t) = \frac{2F(x, t)}{\bar{m}L} \sin(\pi x/L) \quad (4)$$

式中: $\omega = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$, 为桥梁基频; ξ 为阻尼比。研究表明^[20],阻尼对桥梁的共振和消振条件影响较小,但对响应幅值有显著影响。因此,在推导共振与消振条件时,可以忽略阻尼的影响。

求解式(4)的二阶常系数非齐次微分方程并代

入简支梁边界条件(端部弯矩为零,位移为零),可得到广义坐标 $q(t)$ 的表达式

$$q(t) = \frac{\Delta_{st}}{1-S^2} \cdot \sum_{k=1}^N \left\{ \left[\sin[\Omega(t-t_k)] - \sin[\omega(t-t_k)] \right] \cdot H(t-t_k) + \left[\sin[\Omega(t-t_k-T)] - \sin[\omega(t-t_k-\Delta_t)] \right] \cdot H(t-t_k-\Delta_t) \right\} \quad (5)$$

式中: $\Delta_{st} = \frac{2P}{mL\omega^2}$,为单个荷载 P 作用下的简支梁准静态位移; $\Omega = \frac{\pi v}{L}$,为荷载驱动频率; $S = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{\pi v}{L\omega}$,为速度参数。

共振现象发生在列车加载下桥梁的强迫振动阶段以及列车驶过桥梁后的自由振动阶段。在强迫振动阶段,由于列车的连续加载,桥梁的振动响应逐步增大,此时很难区分荷载的累积效应与共振效应。此外,强迫振动阶段的理论推导较为复杂,而自由振动阶段相对简化。因此,许多相关研究选择通过自由振动阶段来分析桥梁的共振与消振现象^[21],即在时间上满足 $t \geq t_N + \Delta_t$ 。在自由振动阶段,将振动响应 $q_n(t)$ 除以准静态位移 Δ_{st} 可以得到自由振动的归一化模态坐标,表达式为

$$R(t) = \frac{q(t)}{\Delta_{st}} = \frac{S}{1-S^2} \sum_{k=1}^N \left[-\sin[\omega(t-t_k)] - \sin\omega[(t-t_k-\Delta_t)] \right] \quad (6)$$

通过数学变换可以得到简化形式

$$R(t) = \frac{S}{1-S^2} A \sin(\omega t + \varphi_n) \quad (7)$$

式中: φ_n 为相位角; A 为自由振动的模态幅值,

$$A = \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2S} + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin^2\left(\frac{ND}{2L} \frac{\pi}{S}\right)}{\sin^2\left(\frac{d}{2L} \frac{\pi}{S}\right)}} \quad (8)$$

模态幅值 A 是描述桥梁振动状态的重要物理量,也是桥梁共振与消振的主要判别指标。 A 为零表示消振, A 达到极大值则通常预示共振。

1.2 共振条件

分析式(8)可以看出,根号内存在分母为零的特殊情况,即 $\sin\left(\frac{d}{2L} \frac{\pi}{S}\right) = 0$,此条件等价于 $\frac{\pi d}{2SL} = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)。此时,分子 $\sin\left(\frac{Nd}{2L} \frac{\pi}{S}\right) = \sin(Nn\pi)$ 亦

为零,根号内分式形成“ $\frac{0}{0}$ ”型不定式。由洛必达法则则可求解该极限

$$\lim_{\sin\left(\frac{d}{2L} \frac{\pi}{S}\right) \rightarrow 0} \frac{\sin\left(N \frac{d}{2L} \frac{\pi}{S}\right)}{\sin\left(\frac{d}{2L} \frac{\pi}{S}\right)} = N \quad (9)$$

上述极限存在,因此该极值的条件 $\frac{\pi d}{2SL} = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)即为共振条件。其极值的绝对值为 N ,表明共振幅值与荷载数量 N 成正比。

若以速度参数 S 表示, $\frac{\pi d}{2SL} = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)可用 $S_r = \frac{d}{2iL}$ ($i \in \mathbb{Z}^+$)替代,需注意的是,式(8)内另一项 $\sin\left(\frac{\pi}{2S} + \frac{\pi}{2}\right)$ 不可取零,否则式(8)整体亦为零。

该条件等价于 $S \neq \frac{1}{j-1} \big|_{j=2,3,4,\dots}$,二者同时成立即构成共振条件

$$S_r = \frac{d}{2iL}, \quad i \in \mathbb{Z}^+ \& S_r \neq \frac{1}{j-1}, \quad j = 2, 3, 4, \dots \quad (10)$$

式中:下标“r”表示共振。通常 $i=1$ 对应的速度参数下共振最为剧烈^[12]。将速度参数 $S = \frac{\pi v}{L\omega}$ 代入式(10)可得共振速度

$$v_r = \frac{f_b d}{i}, \quad i \in \mathbb{Z}^+ \quad (11)$$

式中: $f_b = \omega_b/2\pi$ 为桥梁固有频率。从式(11)可以直观地看出,当荷载作用周期(d/v_r)等于桥梁自振周期($1/f_b$)的整数倍时,将引发桥梁共振。

此外,从式(7)中可观察到,当速度参数 $S=1$ 时,即当荷载驱动频率与桥梁自振频率相等时,桥梁亦可发生共振。此时共振临界速度为

$$v_r = 2Lf_b \quad (12)$$

但由于铁路桥梁跨径一般较短(10~50 m),频率一般较高,式(12)对应的共振速度远超高铁运行速度,通常无须讨论该共振条件^[9]。

1.3 消振条件

当模态幅值 A 为零时,桥梁响应为零,此时发生“消振”现象。使式(8)为零的条件有两个,首先,当 $\sin\left(\frac{\pi}{2S} + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ 时,式(8)为零,对应的消振速度参数为

$$S_c^i = \frac{1}{2i-1}, \quad i \in \mathbb{Z}^+ \quad (13)$$

式中下标“c”表示消振(cancellation)。该消振条件

与桥梁自身和外荷载信息均无关,表征列车-桥梁系统的固有属性,将其定义为内在消振。上标“*I*”表示内部(Internal)。

其次,当式(8)中分子 $\sin\left(\frac{Nd}{2L}\frac{\pi}{S}\right)=0$ 时,式(8)

亦为零,对应的消振速度参数为

$$S_c^E = \frac{N}{2i} \frac{d}{L}, i \in \mathbb{Z}^+ | i \neq N, 2N, 3N \dots \quad (14)$$

与式(13)不同,式(14)所示的消振条件与车桥长度比(d/L)、外部荷载数量 N 相关,将其定义为外在消振,其上标“*E*”表示外在(External)。需要注意的是,自由变量 j 的取值不应为荷载数量 N 的整数倍,否则式(8)分子与分母将同时为零,即 $0/0$ 的情况,此非消振条件。

1.4 共振与消振现象的特征

图2所示为不同速度工况下简支梁跨中位移的时程响应(车-桥参数详见文献[20])。通过对比图2(a)、(b)可以清楚地观察到,当荷载以共振速度运行时,随着荷载的持续施加,跨中位移响应幅值不断增大,振动剧烈,呈现典型的共振现象。此时,自由振动阶段的响应幅值远大于常规速度工况。

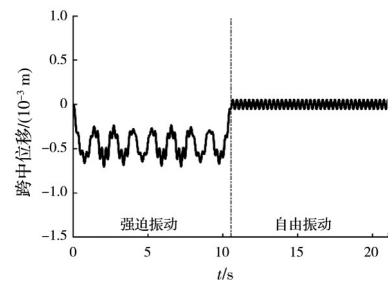
另外,通过观察图2(c)、(d)可以发现,在内部消振和外部消振条件下,自由振动阶段的位移幅值接近于零,振动微弱,表明桥梁振动得到了有效抑制,消振效果显著。

2 列车激励模型

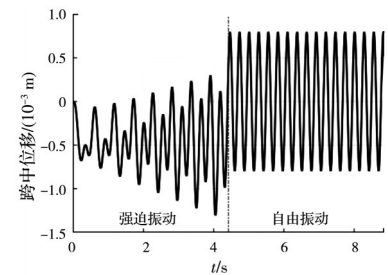
激励是桥梁产生振动的根本原因,在桥梁共振/消振问题的研究中,激励模型的选择以问题求解需求为导向,并在此过程中不断得到丰富和发展^[22]。常用的荷载模型可归纳为3类:忽略车体惯性力的移动力模型(图3(a));考虑车体惯性力但忽略其动态特性的移动质量模型(图3(b));进一步考虑车体动态特性的弹簧-质量模型(图3(c))。

实际上,仅移动力模型能求得桥梁动力响应的精确闭合解,而移动质量模型和移动弹簧-质量模型通常只能得到近似理论解,或需借助数值方法求解。因此,移动力模型在工程中应用更广泛。

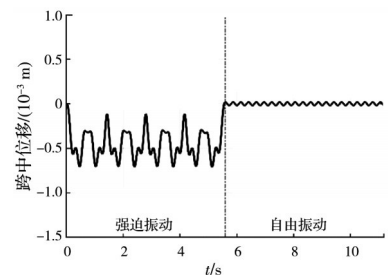
根据列车的结构特点,移动力模型可进一步分为3种形式:将每一个车轮模拟为一个独立荷载(图4(a));将同一转向架下的前后车轮合并为一个荷载,每个转向架作为独立激励源(图4(b));以单节车厢为单元,将重力集中于车厢端部或中部(图4(c))。图4(a)中列车荷载间距包括车长 L_v 、转向架中心距 L_c 和轮对的固定轴距 L_w 。每节车厢的轴重通过4个集中力表示,并根据各轮对的实际位置



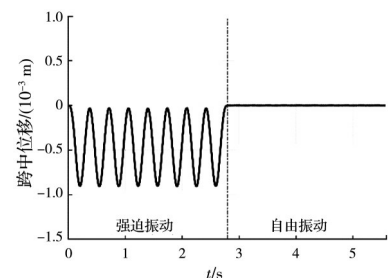
(a) 正常速度 70 km/h



(b) 共振速度 167 km/h



(c) 内部消振速度 132 km/h



(d) 外部消振速度 264 km/h

图2 移动连续荷载以不同速度运行时的简支梁跨中位移响应^[20]

Fig. 2 Mid-span displacement of simply supported beams under equally spaced moving loads at different speeds^[20]

布置。实际上,桥梁的共振频率由车速 v 与车辆长度 L_v 的比值与桥梁固有频率的相互关系确定。消振现象的本质是自由振动的相互抵消。因此,两个等效荷载间距 L_v 、同一转向架中两个轴重荷载间距 L_c 以及前后两个轴重荷载间距 L_w 之间的相互抵消均可以推导出消振条件^[23]。

移动质量模型的复杂程度介于移动力模型与移动弹簧-质量模型之间,应用相对较少。Mao等^[24]对比分析了基于移动力模型和移动质量模型所得

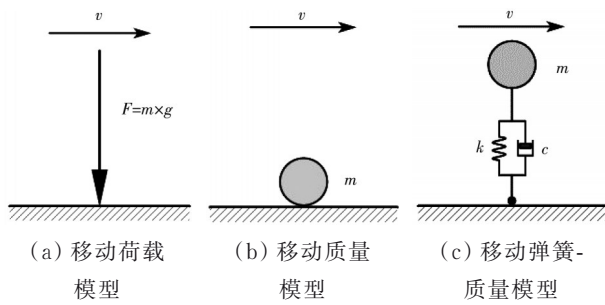
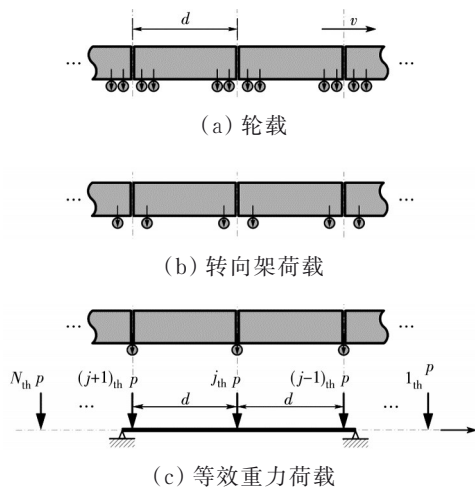


图 3 激励荷载模型

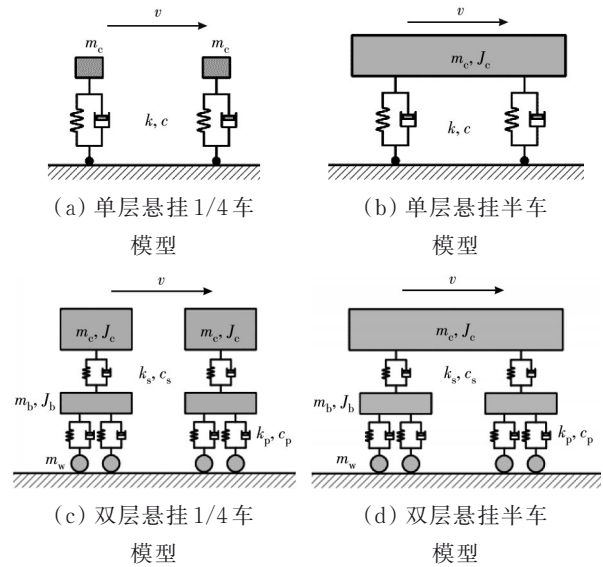
Fig. 3 Excitation load model

图 4 不同类型的列车简化荷载模型^[24]Fig. 4 Simplified load models for different types of trains^[24]

的共振条件,发现由于前者忽略了车-桥耦合效应,其计算结果会高估桥梁的振动响应,且随着车-桥质量比的增大,这一差异愈发显著。Doménech等^[25]基于精细化车辆模型研究了各车辆参数对桥梁最大响应的影响,并筛选出导致桥梁峰值响应的关键参数。Afghani Khoraskani等^[26]利用移动质量模型推导了考虑列车惯性效应的共振临界速度。

移动弹簧-质量模型的优势在于能充分考虑车桥耦合效应并有效表征车体动态特性,从而适用于研究乘坐舒适度与车体共振问题。研究表明,移动力模型往往会高估桥梁响应,而弹簧-质量模型的计算结果更接近实际情况,因此,在共振问题研究中得到广泛应用。在共振与消振机理分析中,列车荷载通常简化为 4 类模型:单层悬挂 1/4 车模型(图 5(a))、单层悬挂半车模型(图 5(b))、双层悬挂 1/4 车模型(图 5(c))以及双层悬挂半车模型(图 5(d))。Biondi等^[27]对比了单层悬挂 1/4 车模型与单层悬挂半车模型,Lou^[28]采用双层悬挂半车模型与双层悬挂钢梁模型,研究结果表明,这 4 类模型对桥梁振动响应及共振特性的影响较小,但对车辆响应分析结果影响较大。相较 1/4 车模型,半车模型能够考虑

车体的摇摆、俯仰等效应,计算结果更接近实际工况。

图 5 移动弹簧-质量系统模型^[22]Fig. 5 Moving sprung system model^[22]

此外,三维列车模型通常采用多刚体系统动力学建模方法,可完整考虑车体、转向架、轮对的沉浮、横移、俯仰、偏航及侧滚等运动自由度,其结构与实际列车系统高度匹配,因此广泛用于车-桥耦合问题的仿真模拟。该模型的优势在于能够精确分析列车系统结构参数对桥梁共振与消振的影响,但难以揭示影响因素的内在机理是其主要局限。总体而言,不同列车荷载模型各具特点,图 3 和图 4 所示的荷载模型用于建立解析理论并探究内在机理,而图 5 所示及三维列车模型则主要用于数值仿真和参数化分析。

3 不同结构形式桥梁的共振与消振

高速铁路桥梁以小跨径梁式桥为主,结构形式包括简支梁桥和连续梁桥等。此外,为满足跨越大江、大河及深谷的需求,拱桥、斜拉桥、悬索桥等大跨度桥梁亦是高速铁路网络的重要组成部分。

3.1 梁式桥

3.1.1 简支梁桥

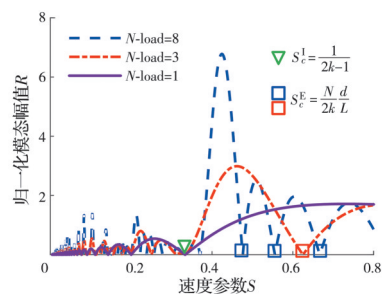
简支梁模型因理论推导简便且能清晰揭示桥梁共振与消振的内在机理,在相关研究中得到了广泛应用。Fryba^[3]基于简支梁模型推导了移动荷载作用下桥梁共振的临界速度表达式 $v_r = f_b d$; Matsuura^[4]通过桥梁频率描述了共振条件 $f_b = jv/d|_{j=1,2,3,\dots}$ 。Yang等^[12]以荷载驱动频率与桥梁频率的比值定义了无量纲速度参数($S = \pi v/L\omega$),并据此建立了共振条件及消振条件。此后,速度参数

S被广泛应用于各类桥梁共振与消振问题的研究^[29-30],包括但不限于最大共振加速度^[21]、列车往返运动下桥梁最大响应条件及消振条件^[31]、单荷载作用下桥梁共振条件^[32]以及水平弯曲梁在竖向和水平移动荷载下的共振与消振条件^[33-34]。

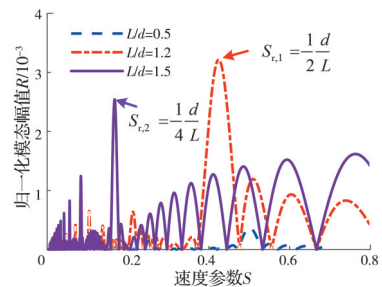
在中国高速铁路快速发展的背景下,中国学者围绕列车/桥梁共振与消振开展了大量研究工作。李建中和苏木标等^[35-38]结合中国铁路桥梁建设特点,分别对比了不同跨度的上承式、下承式钢板梁桥、下承式钢桁架梁桥及预应力混凝土梁桥在共振状态下的车速和跨中竖向振幅,以及车-桥参数的影响,据此提出了基于跨度和桥型的共振控制的建议。夏禾等^[39]将引起桥梁共振的激励源归纳为3类:车辆横向离心力和风力;列车荷载速度^[40];轨道不规则引起的车轮摆动^[41],并基于桥梁自由振动推导出两类消振条件,其中第一类与单荷载相关,由速度、桥频决定;第二类与荷载排列相关,由荷载间距、速度、桥频决定^[42]。在进一步精细考虑列车荷载分布情况后发现,列车轴距 L_w 和转向架中心距 L_c 分别主导着这两类消振条件^[43-44]。李锦华等^[45-46]采用频域分析方法得到了移动荷载匀速通过桥梁时的幅值谱,同样推导出两类消振条件:一类仅与桥梁跨度、基频、荷载速度有关;另一类则涉及桥梁基频、荷载速度、间距和数量。Wang等^[20]推导了简支阻尼梁的广义模态坐标幅值表达式,在时域内解析出了铁路桥梁内在与外在两类消振条件,其中内在消振与速度参数S相关,外在消振附加了外部荷载数量与间距的影响(图6)。Lu等^[47]研究了铁路桥梁响应与列车荷载的频率特性,指出梁长与车辆长度比是决定特征模式以及频率的控制因素,由于列车主频率可能不止一个,桥梁可能存在多个共振条件。Wang等^[48]进一步建立了移动列车荷载偏心作用下的铁路简支梁桥竖向和扭转双共振条件 $f_b/i_{i=2,3,4,\dots} = f_\theta/j_{j=2,3,4,\dots}$,指出该效应会显著增加桥面振动,进而影响轨道结构的稳定性。

3.1.2 边界弹性约束梁桥

由于基础、桥墩和支座等下部结构的存在,实际桥梁的边界支承条件往往并非理想简支,而表现为弹性约束。此外,铁轨的连续性会引入轴向力,从而产生附加刚度,进一步影响车-桥系统的振动特性。与简支梁模型相比,弹性约束梁桥模型能够更真实地反映桥梁及其行车动力行为的特性^[49-50]。然而,从数学角度来看,弹性支承梁的振型精确解非常复杂^[51-52],难以直接推导出共振与消振条件。为解决这一问题,Yang等^[53]提出了一种简化方法,假



(a) 不同荷载数量



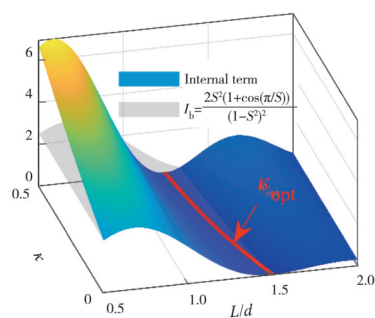
(b) 不同车-桥长度比

图6 移动荷载作用下简支梁的共振与消振^[20]

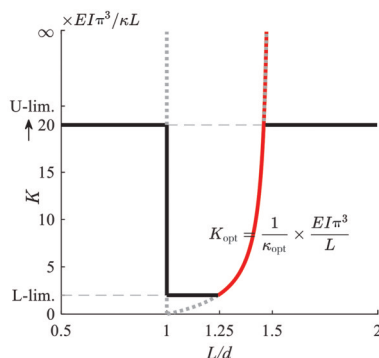
Fig. 6 Resonance and cancellation of a simply supported beam under moving load^[20]

设弹性支承梁的位移由简支梁的弹性变形与弹性支承刚梁的平移位移叠加而成,从而建立了弹性支承梁振型的简化表达式。研究表明,弹性支承梁的共振速度参数与简支梁相似,但由于弹性支座的存在降低了桥梁的固有频率,共振发生的概率相应增加。这一结论随后通过两跨铁路桥梁的现场测试得到了验证^[54]。值得注意的是,共振条件与支座刚度的变化无关,而消振条件则显著受支座刚度的影响。基于此,陈雷等^[55]通过反算支座刚度提出了最佳支座刚度设计准则^[56],该准则能够有效消除第一阶主共振,从而在设计阶段避免共振的发生(图7)。此外,陆建飞等^[57]基于Fourier变换及传递矩阵方法研究了移动列车荷载作用下周期性弹性支承连续梁的共振与消振条件。战家旺等^[58]通过施加横向弹性约束模拟桥墩,从理论上推导了横向弹性支承梁在蛇形力作用下的共振和消振条件。Zangeneh等^[59]进一步推导了移动力作用下黏弹性支承梁自由振动的最大位移幅值及共振加速度响应的表达式。

轨道结构的连续性会引入轴向附加刚度,从而对主梁的边界条件产生约束效应。Hankari等^[60]采用旋转弹簧约束的部分夹紧简支梁模型模拟有砟轨道桥梁,推导了在轴向力作用下轨道桥梁的动态响应以及共振与消振条件,结果表明,轨道轴向力会显著改变桥梁的临界速度,且轨道的连续性对桥梁竖向加速度亦具有重要影响。Zhang等^[61]进一步采用弹性约束四梁模型模拟无砟轨道结构系统,发



(a) 弹性支承刚度对桥梁消振的影响



(b) 最佳桥支刚度比选择

图7 弹性支承梁设计准则^[56]Fig. 7 Design criteria for elastically supported beams^[56]

现忽略轨道结构会显著高估桥梁的共振速度。

3.2 板式桥

板桥模型能全面考虑桥梁的空间横向振动特性,从而更准确地描述桥梁的整体振动行为,尤其适用于复杂荷载作用下的动态响应分析。与传统梁桥模型相比,板桥模型能够更好地反映桥梁的实际受力状态,特别是在宽桥或曲线桥中,其优势更为突出。然而,由于板桥模型的理论分析较为复杂,涉及高阶偏微分方程和复杂的边界条件,解析求解难度较大,目前关于板-梁共振与消振的研究相对有限,且多集中于数值模拟和半解析方法。

Nikkhoo等^[62]和Hassanabadi等^[63]采用半解析方法建立了移动力/质量双向运行下矩形板的共振函数模型,通过分析载荷速度、惯性及荷载间距变化,确定了动态放大系数(DAF)的峰值,发现荷载的移动速度和分布对板的共振特性有显著影响。这一研究为理解板桥在移动荷载作用下的动态行为提供了重要理论支持。Martínez-Rodrigo等^[64]进一步研究了正交各向异性板的共振特性,探讨了弹性支承与简支边界条件以及板的倾斜程度对桥梁共振的影响,指出边界支撑刚度和板的几何特性对共振频率及振动模态有重要影响,为桥梁设计中的共振控制提供了理论依据。

Torkan等^[65]研究了连续移动质量作用下简支矩形薄板的动态不稳定性及共振问题,发现荷载路

径对板的动态不稳定性及共振条件具有显著影响,特别是在荷载路径与板的振动模态耦合时,容易引发强烈共振。该发现为桥梁设计中的荷载路径优化提供了有益参考。Moliner等^[66]通过对比板式桥与梁式桥的竖向加速度响应发现,板式桥的竖向加速度表现更优,且不易出现过度共振现象,进一步验证了板桥模型在描述桥梁振动特性方面的优越性,尤其是在高速铁路桥梁中,板桥模型能够有效避免共振引起的结构疲劳和破坏。

尽管板桥模型在理论分析和实际应用中具有显著优势,但其复杂性也限制了其广泛推广。后续研究可着眼于板桥模型的简化分析方法,或结合人工智能技术开发高效的数值模拟工具,以推动板桥模型在桥梁设计与振动控制理论中的应用。

3.3 大跨度铁路桥梁

为满足跨江或跨越山谷的需求,拱桥、斜拉桥和悬索桥等大跨径铁路桥梁已成为高速铁路网络的重要组成部分。然而,由于跨度大、结构柔度高等特点,此类桥梁在移动列车荷载作用下的共振问题尤为突出,对桥梁的安全性和列车运行的平稳性构成了严峻挑战。

Ju等^[67]用简支梁的反对称模态分析拱桥的共振问题,提出了钢拱桥的两个共振条件:一是 $n v_{\text{train}}/L_{\text{train}}$ 主导的序列频率等于桥梁的前几阶频率;二是列车速度超过 $0.5Lf$ (f 为桥梁反对称模态对应的频率)后,当速度等于 $0.88Lf$ 时共振达到最大值。该研究为拱桥共振分析奠定了理论基础。随后,Lacarbonara等^[68]提出了适用于一般激励下的拱桥分布参数模型,利用Ritz法与模态叠加法推导出了桥梁位移响应的闭合解,并进一步建立了拱桥的共振速度公式 $V_k = L_c f_k/n$ (其中 L_c 为荷载间距, f_k 为桥梁频率)为拱桥共振速度的预测提供了更为精确的理论工具。

Gu等^[69]研究TGV列车引起长跨铁路桥的共振机理发现,由于桥梁与列车及悬挂系统的固有频率与列车的驱车频率相近,长跨铁路桥对共振现象尤为敏感。这一发现凸显了长跨桥梁在高速铁路设计中的特殊挑战。Yau等^[70]分析了移动荷载下悬索梁桥的共振特性,指出当列车激发频率 v/d 与桥梁的任何固有频率匹配时,桥梁将产生共振。此外,Lu等^[71]探讨了长跨斜拉桥的纵向共振问题,发现当移动荷载的等效纵向加载频率等于斜拉桥的第一阶纵向自然振动频率时,纵向共振现象即会发生。

尽管上述研究为长跨径铁路桥梁的共振分析

提供了重要的理论依据,但由于其结构的复杂性和荷载作用的多样性,仍需进一步深入。后续研究可以结合现场测试数据来验证理论模型的准确性,或探索新型减振技术以降低共振风险。此外,随着高速铁路网络的扩展,针对不同桥梁结构类型(如组合梁桥或混合结构桥)的共振特性研究也亟待加强。

不同结构形式桥梁之间的共振条件存在共同规律:当列车荷载驱动频率或列车系统自身振动频率与桥梁固有频率相等时,可能引发车桥共振(见表 1)。

表 1 列车荷载作用下典型桥梁结构的共振与消振条件
Table 1 Resonance and cancellation conditions of typical bridge structures under train loads

结构形式	共振与消振条件
简支梁	临界速度表达式: $v_r = f_b \cdot d^{[3]}$
	速度参数: $S_r = d/(2iL) i \in \mathbb{Z}^+^{[12]}$
	内在消振: $S_c^I = 1/(2j - n) j \in \mathbb{Z}^+ \& 2j > n^{[20]}$ 外在消振: $S_c^E = Nd/(2jL) j \in \mathbb{Z}^+ \& j \neq N \& N \geq 2^{[20]}$
弹性 支承梁	共振条件: $S_r = d/(2nL) n \in \mathbb{Z}^+$, 与简支梁一致 ^[56]
	外在消振: $S_c^E = Nd/(2jL) j > N \cdot i \& i, j \in \mathbb{Z}^+ \& N \geq 2$ 与简支梁一致 ^[56]
	内在消振: $\frac{2S_c^{I2}}{(1 - S_c^{I2})^2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{S_c^I} \right) - \kappa \left(\frac{4S_c^I \kappa}{1 - S_c^I} \sin \frac{\pi}{S_c^I} - 2\kappa \left(1 - \cos \frac{\pi}{S_c^I} \right) \right) = 0^{[56]}$
板桥	简支板桥共振速度: $v_{mn}^r = d_k f_{mn}/j^{[64]}$
	弹性支承板桥共振速度: $v_{mn}^r = d_k \bar{f}_{mn}/j^{[64]}$
拱桥	共振速度: $v_k = L_c f_k/n^{[68]}$
斜拉桥	第一共振速度: $v_{r1} = (L_2 + L_m/2) f_1 = L_e f_1$, L_2 为边跨长度, L_m 为主跨长度 ^[71]
	第二共振速度: $v_{r2} = f_1 d\sqrt{j} j \in \mathbb{Z}^+$, d_v 为相邻荷载间距 ^[71]
悬索桥	共振速度: $v_r = f_i d_i i \in \mathbb{Z}^+^{[70]}$

4 桥梁共振与消振的主要影响因素

4.1 桥梁跨数

以京沪高铁为例,线路中超过 80% 的桥梁采用连续多跨等跨简支梁结构。与单跨梁桥不同,多跨梁桥不仅受到周期性列车荷载左右,其自身也具有周期性。这种结构与荷载的双周期性导致多跨桥梁的共振和消振问题与单跨梁桥存在一定差异^[72]。

Yau 等^[13]对比分析了移动荷载作用下简支连续梁与简支单跨梁的动力学特性,发现由简支单跨梁推导的共振条件同样适用于简支连续梁,随着梁跨数量的增加,桥梁频率分布更加密集,主共振峰值

显著增大^[73]。这一结论得到了 Kwarck 等^[74]的验证,他们通过韩国高铁 KHST 行驶下的两跨连续预制混凝土 Yeon-Jae 桥现场实测数据,证实了多跨连续梁的共振特性与理论分析的一致性。田杰等^[75]研究了中国高铁桥梁中 16、24、32、40 m 等常用跨长混凝土简支梁的动力系数,发现桥梁的前 4 跨对列车运行的平稳性影响较大。Ju 等^[76]进一步研究发现,通过增强连续轨道之间的轴向刚度或承载板的摩擦力可以有效减小多跨桥梁的共振响应。Yang 等^[77]在分析列车通过连续多跨桥梁时发现,忽略轨道效应可能会在高速范围内低估桥梁的共振响应。Yau^[78]对列车作用下的某连续桁架桥进行了数值研究,发现两跨连续桁架桥存在两个共振峰,且第二跨的共振幅值大于第一跨。Wang 等^[79]也发现两跨连续梁存在两个共振速度,其中第一跨的共振速度与同条件下的简支梁相等,但共振幅值小于简支梁,并提出了适用于双跨连续梁的共振条件。Lou^[28]指出,连续梁的动力响应通常小于简支梁,表明连续梁桥布置有利于减小桥梁共振。Cho 等^[15]通过对列车荷载作用下桥梁的共振反应谱分析,同样发现多跨桥梁的共振响应小于单跨桥梁。Martínez-Rodrigo 等^[80]推导了两跨连续梁的共振和消振条件,并研究了其与桥跨长/荷载间距的关系,最终将研究成果应用于瑞典铁路桥梁的设计中。Xin 等^[81]对一座 60 m + 100 m + 60 m 非等跨连续梁的共振与消振现象进行了数值研究,发现连续梁的共振速度明显大于简支梁(单跨),且连续梁的共振响应动态放大系数与荷载数量并非线性相关。

综合以上研究可以发现,由于连续梁的多跨振动累积效应,其共振响应通常大于单跨简支梁。然而,连续梁桥的布置形式(如跨数、支座刚度和轨道效应)对共振特性有显著影响。后续研究可以进一步探索多跨连续梁的振动能量传递机制,并结合现场测试与数值模拟,提出更精确的共振控制策略。

4.2 模态阶数

在桥梁振动分析中,第一阶模态通常起主导作用,因此,大多数学者主要关注第一阶模态下的桥梁共振与消振现象。然而,为了全面掌握桥梁的振动特性,不少学者进一步探讨了第二阶及高阶模态对桥梁振动的影响,以揭示更复杂的共振与消振规律^[12,21]。

Museros 等^[14]研究了二阶模态对桥梁振动响应的影响发现,对于桥梁位移响应而言,仅考虑一阶模态即可满足精度要求;但对于加速度响应,二阶模态的贡献不可忽视。同时,该研究还确定了对应二阶模态的消振条件。Yau 等^[82]进一步分析了二阶

模态对简支梁加速度响应的影响发现,当考虑桥梁阻尼时,第二阶模态的影响显著减弱,桥梁振动仍主要由第一阶模态控制。Wang等^[79]通过两跨连续梁的共振特性分析发现,当列车激励频率与连续梁的第一阶和第二阶频率匹配时,均会引发共振现象。Cho等^[15]推导了高阶共振速度的通用表达式,指出单跨简支梁的共振主要由第一阶模态主导,而双跨连续梁的共振可能由第二阶模态主导。

Martinez-Rodrigo等^[80]研究了两座等跨铁路桥梁的振动特性,发现其最大加速度响应主要由第一阶反对称模态和第一阶对称模态控制。孟鑫^[83]通过理论分析与现场试验研究了24、32、40 m跨度简支箱梁的共振现象,发现中国高铁常见跨度箱梁在运营速度范围内不太可能出现基阶共振,但可能存在2、3、4阶超谐共振现象。杨宏印等^[84]基于简支梁自由振动解析式的极限条件推导了共振与消振速度,并指出随着车速的增加,第二阶模态对自由振动的贡献逐渐增大,而更高阶模态的贡献可以忽略不计。

总之,对于单跨简支梁,一阶模态主导桥梁的位移响应,而二阶模态对加速度响应的影响不容忽视,较高阶模态对共振的贡献可在一定条件下予以忽略。对于双跨或多跨连续梁,一阶和二阶模态均可能主导共振,甚至可能出现更高阶的超谐共振现象。因此,在共振分析中,需根据桥梁的跨数和结构特性,合理选择重点关注的模态阶数。未来的研究应深入探讨高阶模态对桥梁振动特性的影响,特别是在复杂荷载作用下及多跨桥梁结构中的表现,从而为桥梁设计与振动控制提供更全面的理论依据。

4.3 车桥耦合效应

列车通过桥梁时,车辆的动态载荷(如振动、冲击)会激发桥梁的振动,而桥梁的振动反过来又会影响车辆的运行状态(如稳定性、乘坐舒适性)。这种双向的动态能量传递和反馈机制称为车-桥耦合效应。在推导车-桥共振、消振条件的过程中,列车激励常被假设为移动荷载,或者在推导过程中假设列车质量远小于桥梁质量。

实际上,考虑车桥耦合效应后,桥梁的振动响应比移动力作用下小,且随着车厢/桥质量比的增大,这种抑制效应更加显著^[23]。欧洲标准Eurocode 1采用附加阻尼法车-桥耦合效应,但在短跨桥梁中该方法可能低估共振响应^[85-86]。因此,很多学者选择对车厢进行精细建模以计入车-桥耦合效应。借助图5(d)的精细车厢模型,Doménech等^[25]发现桥梁与转向架质量比越低,车-桥耦合效应越显著。进一

步考虑了车厢之间连接所用的车钩对车-桥耦合作用的影响后,Duan等^[87]发现车钩耦合器可减小桥梁引起的车厢共振,但在桥梁振动较大时该作用可能失效;车钩阻尼有助于减小车厢共振,但对桥梁响应的抑制作用有限;当桥梁与列车共振速度一致时,系统可能发生“双共振”现象。在此基础上,Yang等^[88]继续指出,车钩刚度主要受车厢长宽比、共振速度及车厢/跨长比影响,并且列车通过车钩的波传输效应会使共振响应从前车向后车逐渐增强。时瑾等^[89]理论推导了运行于连续多跨简支梁的列车共振条件,重点分析了车体点头和沉浮共振,发现车体共振也会加剧桥梁振动响应。

影响车-桥耦合效应的重要因素之一是车-桥系统的时变性,即由于车辆位置的变化,车-桥耦合系统的动态特性随时间变化,从而影响桥梁模态。Matsuoka等^[90]采用贝叶斯时频分析估算列车过桥时的车-桥耦合效应,通过实桥试验发现,桥梁频率降低,阻尼增加。类似地,Lou等^[91]提出了一种基于桥梁等效模态质量的分析方法,观测到列车引起的桥梁频率偏移现象。Wu等^[92]结合小波时频分析方法研究了铁路桥梁共振的时频特性,指出共振和准共振触发频带是导致桥梁响应高度增强的主要原因,而非共振桥梁的主要现象是稳态响应和瞬态响应之间的交替主导。上述研究均表明,车-桥耦合效应具有显著的时变性,会对桥梁共振状态产生重要影响。

综上所述,车-桥耦合效应通过双向能量传递显著影响桥梁的共振与消振特性,使得桥梁振动响应相较单纯移动荷载作用下明显减小,且抑制效应随车厢与桥梁的质量比增大愈发明显。同时,车钩刚度及其波传输效应在列车共振中发挥着关键作用,可能引发“双共振”现象。此外,车桥系统的时变性和对桥梁模态特性产生重要影响,导致桥梁频率的偏移和阻尼的变化,从而影响共振响应。研究表明,精细考虑车-桥耦合效应对于准确预测桥梁的动力响应、优化列车运行参数以及提高桥梁设计与振动控制效果至关重要。

4.4 车-桥系统的随机性

车桥系统的随机性主要来源于车辆、轨道、桥梁、环境以及列车编组等因素,这些不确定性对桥梁共振和消振特性产生直接影响。

1) 车辆参数的随机性

车辆质量、轴重、悬挂刚度等参数的变异性会影响车桥耦合效应,使桥梁动力响应呈现不确定性。王英杰等^[93]分析了车辆弹性振动对共振的影响,发现弹性车体共振会显著放大动力响应,其共

振速度由车辆轴距和车体自振频率共同决定。车辆参数的变化会进一步改变桥梁共振与消振的触发条件。列车编组方式(如列车间距、编组长度和车厢结构等)会影响桥梁振动的叠加效应,使共振与消振行为更复杂。

2) 轨道不平顺的随机性

轨道不平顺(如焊缝错位、轨道沉降等)会对列车施加随机激励,使桥梁动荷载呈现不确定性,并改变其共振与消振特征。杨宏印等^[94]将轨道不平顺分为轨道随机不平顺和桥梁徐变不平顺。研究发现,轨道随机不平顺是桥梁加速度的主要激励源,可导致最大响应峰值偏离共振车速,并对轮轨接触力产生显著影响;而桥梁徐变不平顺对其动力响应影响较小,但会增大车体加速度,影响乘客舒适性,并可能引起梁端冲击。

3) 桥梁结构参数的不确定性

桥梁的材料特性(如弹性模量、阻尼比)可能随制造工艺、老化、环境因素而产生变化,进而影响桥梁模态特性。Ülker-Kaustell等^[95]在对某简支单跨钢混组合桥梁的测量中发现,桥梁的固有频率和模态阻尼比随时间变化,这种非线性行为可能源于基础结构或道砟上部结构的土壤材料特性的变化。Tahiri等^[96]研究了道砟参数和梁长变化对共振响应的影响发现,道砟上部结构的非线性刚度和阻尼会对桥梁共振响应产生影响——在中短跨桥梁上,其作用类似于Duffing振荡器;而在较长的桥梁上,道砟影响较小,可简化为附加质量进行建模。Xin等^[97]研究发现,由于系统参数的变异性,共振和消振的临界车速本质上是随机的,桥梁最大动力响应不会严格出现在确定性分析预测的共振速度处,而是表现出分布范围更广的共振响应。传统的确定性方法可能会显著低估共振的最大幅度,从而无法捕捉到潜在风险^[98]。此外,Xiang等^[99]利用随机有限元法研究材料随机性对桥梁共振响应的影响发现,材料参数的变异性会增大桥梁响应,同时降低桥梁的共振速度。

4) 环境荷载的随机性

外界环境(如风荷载、温度变化、地震作用等)对车-桥系统的动力响应同样有重要影响。横风会影响列车运行的稳定性,从而间接改变桥梁的动力响应;温度变化可能引起桥梁材料性质的变化,导致桥梁模态频率漂移,进而影响共振特性;地震作用会诱发桥梁的低频振动,使得列车通过时的共振现象更加复杂。

综上所述,车-桥系统的随机性对桥梁共振和消振特性产生了显著影响,这种影响体现在车辆、轨

道、桥梁结构、环境和列车编组等多个不确定因素的相互作用中。这些随机性因素使桥梁共振现象变得更加复杂,传统的确定性分析方法可能无法准确捕捉到潜在的风险,尤其是在极端工况下。未来的研究应进一步发展考虑系统随机性的分析方法,以便更全面地理解和应对车-桥系统中的共振与消振问题,从而提高桥梁的设计、评估和安全性管理水平。

4.5 系统阻尼

阻尼能有效减少结构在外部激励作用下的振动幅度。针对车-桥系统中的阻尼影响已有大量研究。Majka等^[100]通过参数化分析发现,桥梁阻尼主要影响桥梁的响应,而车辆阻尼主要影响车辆的响应,二者的相互作用较弱,表明桥梁和列车系统可分别优化其阻尼特性,而无需考虑强耦合效应。Frýba^[3]通过现场测试发现,不同跨长桥梁的阻尼比存在差异,例如10 m桥梁的阻尼比为5.5%,5 m桥梁的阻尼比达10.8%,表明短跨桥梁在车-桥系统中需特别考虑阻尼的影响,否则可能导致较大的振动响应。

阻尼对车-桥系统共振的影响显著。Wang等^[79]研究阻尼比对两跨连续梁最大挠度的影响时发现,在共振临界速度下,阻尼比越大,梁的挠度越小;在非共振条件下,阻尼对振动的抑制作用较为有限,表明合理设计桥梁阻尼可以有效降低桥梁在列车高速运行时的振动响应。Xia等^[42]指出,桥梁阻尼虽然降低了消振条件下的桥梁振幅,但在自由振动情况下并未完全消除振幅,而是呈现局部最小值。Kumar等^[32]发现,阻尼虽然减小了最大响应幅值,但在消振速度下却可能增大响应,说明桥梁消振设计中需充分考虑阻尼的负面影响。Wang等^[20]从数学角度解释了这一影响,并将其称为桥梁阻尼的“泄漏效应”(leaking effect),即部分能量虽然通过阻尼耗散,但系统仍可能存在较大的振动响应。Yang等^[26]研究桥梁跨数和列车车厢数量对系统响应的影响发现,当两者增多时,车厢的仰俯共振响应随之增加,增加二级悬挂阻尼可以有效减少列车的共振响应,提高行车舒适度和安全性。杨宏印等^[84]发现,当桥梁阻尼比小于某一特定值时,车-轨-桥耦合系统的加速度响应无法快速衰减,导致最大加速度曲线的波峰出现延迟,表明桥梁阻尼不足可能加剧共振响应。

上述研究表明,阻尼在桥梁共振状态下的影响最为显著,可有效降低桥梁振动幅度;在非共振条件下,阻尼的影响较小。短跨和多跨连续梁对阻尼的需求更高,应特别关注阻尼的设计。车-桥系统的

耦合效应使得二级悬挂阻尼成为优化列车振动的关键手段。在桥梁设计与车桥动态分析中,应综合考虑阻尼对共振与消振的影响,优化阻尼参数,以提高桥梁的抗振能力和长期稳定性。

4.6 其他因素

桥梁的下部结构与地基直接接触,因此,地基变化以及基础与地基相互作用也可能会显著影响车-桥系统的共振特性。研究表明,尽管地面沉降对桥梁整体响应的影响较小,但在移动列车作用下,特别是在凹型支承沉降剖面条件下,地面沉降可显著放大列车的竖向响应^[101]。Romero等^[102]通过构建车-桥-墩-土耦合振动模型发现,土-结构相互作用不仅能降低共振速度,还会削弱共振响应。Doménech等^[103]通过三维有限元分析发现,土-结构相互作用效应与弹性支承效应相似,当共振速度接近消振条件时,共振峰响应几乎不可察觉。Lu等^[104]探讨了周期性桩支撑桥梁的共振效应,结果显示,高架桥在通带中更容易出现共振峰,且随着列车速度的增加,共振峰的数量呈减少趋势。上述研究共同揭示了地基及基础与地基相互作用在车桥共振中的关键作用,为桥梁结构抗振设计和高速铁路安全运营提供了重要的理论依据。

5 桥梁共振控制

列车运行引发的桥梁共振对桥梁结构的安全性及使用寿命构成严重威胁,因此,共振控制研究对桥梁的长期平稳运行至关重要。桥梁共振控制方法大致可分为两类:一类是通过优化桥梁的跨长设计来实现消振。消振设计概念最早由Yang等^[12]提出,该研究首次揭示了当系统共振条件与消振条件同时满足时,桥梁结构的共振现象可被有效抑制这一重要机理。基于这一理论突破,Yang研究团队进一步推导出适用于简支梁体系的最佳跨长设计准则,该准则不仅能显著消除结构的一阶共振响应,更因其理论严谨性和工程实用性而成为现代桥梁抗震设计的重要规范依据。目前,这一设计准则已经成功应用于韩国高铁^[15]和中国高铁^[16]建设,并推广至高阶共振的消振设计^[44]。

另一类共振控制方法是采用阻尼器等控制措施破坏共振发生条件。例如,在神华大准铁路黄河特大桥上,程辉^[105]通过实测评估指出,列车提速后可能引发桥梁共振,因此必须采取改造措施,以确保桥梁结构安全。为了增强桥梁对共振的抵抗力,杨宜谦等^[106]提出,在桥梁上安装协调质量阻尼器(TMD)以减小竖向共振,取得了显著的减振效果。刘保东等^[107]研究了黏弹性阻尼器(VED)在消除共

振中的应用。Yau^[78]针对两跨桁架桥梁的共振频率问题,提出将两个子TMD混合并集成一个混合TMD系统,分别安装在桥梁各跨,有效抑制了共振的发生。郭文华等^[108]通过大量参数分析提出了一种确定共振车速和TMD优选参数的简便方法。Martínez-Rodrigo等^[109]探讨了被动控制技术在抑制简支铁路桥过度振动中的效果,提出通过在桥面和辅助结构之间设置流体黏滞阻尼器来控制桥梁共振。Wang等^[110]研究了通过在桥面下安装VED来消除两跨连续梁的多共振峰值问题,并讨论了不同安装位置的共振控制效果。Lavado等^[111]提出了一种利用FVD减小桥梁共振的被动控制技术,可有效减小主梁的垂直加速度。李锦华等^[112]讨论了FVD安装位置对共振控制效果的影响。Yau等^[113]提出了一种增强型主动俯仰谐振器(APR),其能够产生与外部激励相反的相互作用力,从而提高频率带宽,衰减传输至列车的主要共振波。

此外,宁晓骏等^[72]通过数值分析研究了不同跨径布置方案对车桥响应的影响,发现长跨径多跨连续布置对车-桥最不利,而对于中小跨径桥梁,布置方式对共振的影响较小,具有重要的工程意义。高传伟等^[114]建议通过调整车厢和桥梁的长度比来避免共振现象。Shin等^[115]提出在韩国高铁KTX列车排布中插入调整尺寸车厢,以消除列车荷载的周期性,从而破坏共振条件。周长东等^[116]提出,通过加固桥梁结构提高其自振频率,避免与列车频率重合,从而有效避免共振发生。针对桥梁的横向振动,张许^[117]提出了一种加固方法,通过安装后加钢支撑,在CRH2型动车组通过32 m简支双T梁时成功消除了横向共振。

综上,桥梁共振控制研究已形成以结构优化与阻尼控制为核心的双重技术路径,并衍生出多维度协同治理策略。在结构优化方面,以Yang等^[12,56]提出的消振设计理论为基础,通过跨长参数优化、刚度分布调整及跨径布置方案的改进,从设计源头消减共振风险,其有效性已在中、日、韩高铁工程中得到验证。阻尼控制技术则呈多样化发展趋势,涵盖被动控制(TMD、VED、FVD)、主动控制(APR)及混合控制策略,通过精准调控阻尼器参数与安装位置,实现对不同振动模态的靶向抑制,其中流体黏滞阻尼器与协调质量阻尼器的工程应用效果尤为显著。值得关注的是,新型控制策略如车厢长度比调整、周期性荷载破除、结构频率主动调节等创新方法,进一步拓展了共振控制的边界条件。当前研究正朝着精细化、智能化方向演进,数值模拟与实测数据的深度耦合为参数优化提供了新方式,而多

学科交叉技术的融合应用将推动形成覆盖全寿命周期的桥梁共振防控体系,为高速铁路网络的安全运营构筑坚实的技术屏障。

6 现场试验研究

由于列车与铁路结构系统的复杂性,高速铁路桥梁共振与消振现象具有显著随机性。为此,众多学者开展了大量现场试验研究。Galvin等^[118]在Madrid-Sevilla高速铁路线的两跨简支梁桥进行了现场监测,发现当Renfe S103列车以279 km/h的速度通过时,桥梁出现了明显的第一阶竖弯主共振;当列车以247 km/h的速度通过时,检测到第一扭转模态的共振。两个共振都与乘客车厢的长度有关。类似共振特性也在Altaria Talgo列车驶过Guadiana桥梁时被观测到^[119]。张焜等^[120]在对广深线和沪宁线提速至160 km/h的实桥监测中观察到32 m下承式钢板梁出现竖向共振,几乎相同速度下,广州—深圳准高速铁路石滩64 m钢桥也在提速测试中出现了共振现象^[121]。这一现象引起了对既有线路铁路桥梁提速安全的高度重视^[122]。郭薇薇等^[123]对更高速度的340 km/h车速下的铁路桥梁进行了现场实测,证实了列车的提速存在诱发桥梁共振的潜在风险。刘鹏辉等^[124]、杨宜谦等^[125]分别对200~350 km/h列车在桥上运行的安全性与平稳性的现有规定进行调研,发现了在特定速度下桥梁的超谐共振现象。Sánchez-Haro等^[126]提出基于动态影响线、等效力和相对跨度的概念,开发了一种共振速度简化检测方法,该方法适用任何形式桥梁,经两座实桥测试验证有效。丁幼亮等^[127]对大胜关钢桁拱桥开展现场监测发现,在150~250 km/h的列车车速区间内,该桥主梁横向和竖向振动加速度均存在明显的共振现象,且竖向共振大于横向共振;竖向共振与运行列车速度和列车长度存在相关性。

以上试验研究表明,高速铁路列车与桥梁结构之间的相互作用复杂且具有随机性。列车车速、车型和桥梁结构特征等因素显著影响共振发生,尤其在列车提速过程中,桥梁共振风险增加。特定车速下,列车会引发桥梁竖向和扭转模态共振,不同列车类型在不同速度范围内表现出不同的共振特征。

7 结论与展望

运行列车引起的桥梁共振与消振问题是铁路车-桥耦合研究的重要分支,关乎桥梁结构的安全性、疲劳耐久性以及列车运行的平稳性与安全性。笔者梳理了桥梁共振与消振问题的研究进展,涵盖桥梁共振与消振基本理论、列车激励模型的发展、

不同结构形式桥梁的共振与消振研究、桥梁共振与消振的主要影响因素、桥梁共振控制、现场试验研究6个部分,得到以下主要结论:

1)目前,铁路列车/桥梁共振与消振研究仍以理论分析为主,构建了不同荷载与桥梁类型下的共振与消振条件;数值模拟研究大多聚焦于列车-轨道-桥梁耦合系统参数及随机性的影响规律分析;现场试验研究操作复杂且环境干扰影响大,研究工作相对较少,但也验证了列车/桥梁共振条件的触发机制。

2)不同结构形式桥梁之间的共振条件存在共同规律:当列车荷载驱动频率或列车系统自身振动频率与桥梁固有频率相等时,可能引发桥梁共振。单跨简支梁的共振与消振条件是各类桥梁共振研究的基础。

3)一般情况下,桥梁跨数增多会放大列车振动响应,同时也会增大桥梁自身振动。当桥梁引起的列车共振速度与列车引起的桥梁共振速度一致时,桥梁和列车发生“双共振”。

4)对于简支梁,一阶模态在共振位移中占主导地位,二阶模态对共振加速度影响较大,更高阶模态的影响一般可忽略;对于连续梁,二阶模态对共振位移的贡献一般也较大,不能忽略。

5)车-桥耦合效应会减小桥梁的共振幅值。但在实际运行中,车-桥耦合系统的随机性对共振幅值影响很大,可能造成“随机共振”。

6)桥梁阻尼能有效减小其共振幅值,有利于共振控制。但同时会造成消振的“泄露效应”,无法达到零振动的理想消振状态。

7)基于消振设计思想的铁路桥梁最佳跨长设计准则($(L/d)_{\text{opt}}=1.5$),能使桥梁振动量达到最小,有效消除共振;此外,亦可通过设置桥梁频率下限、改变列车组构成等措施破坏共振发生条件,主动避免共振。

8)对于在役桥梁,采用TMD、VED、FVD、APR等阻尼器可有效抑制共振响应,提高其抵抗共振的能力。

9)从现场试验数据来看,铁路桥梁共振以第一阶竖弯模态共振为主,其与运行列车速度和列车长度之比(v/d)存在显著相关性;扭转模态共振不显著。

随着信息化与智能化的发展,高速铁路建造与运维技术也不断进步。结合当前研究动态,未来研究可关注以下几个方面:

1)剖析整车系统几何与材料参数及轮轨接触模型、轨道-桥梁-墩体系统参数等对空间状态(竖

弯、扭转)下车-桥共振与消振的影响机制,建立三维真实状态下的桥梁共振与消振精细分析理论与触发机制。

2)研究列车/桥梁消振的敏感影响参数与致敏机制,建立基于列车运行安全及舒适度的桥梁消振设计与共振控制方法,实现列车/桥梁系统参数的协同优化。

3)研究循环列车荷载与复杂环境影响下的铁路桥梁服役性能演化机制,建立涵盖性能演变、行为预测、共振筛查与评估预警的全寿命周期管养理论与技术体系。

4)研究基于列车响应的病害/共振桥梁快速巡检理论与方法,建立列车感知大数据驱动的桥梁病害与共振智能筛选与量化评估方法,实现铁路交通基础设施轻量化、智能化检测与养护。

5)利用机器学习算法对桥梁振动数据进行实时分析,识别共振频率和临界速度。通过大量历史数据训练模型,实现共振特征的自动提取与智能预警。

6)利用智能算法,结合有限元仿真,开发支承刚度与阻尼参数的自动寻优减振装置,以进一步优化消振效果。

参考文献

- [1] Stokes G G. Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges[C]//Mathematical and Physical Papers vol.2. Cambridge: Cambridge University Press, 2010: 178-220.
- [2] Bolotin V V. The dynamic stability of elastic systems [M]. Volume 1. Aerospace Corporation, Systems Research and Planning Division, 1962.
- [3] Frýba L. Vibration of solids and structures under moving loads[M]. Cham: Springer Netherlands, 1973.
- [4] Matsuura A. A study of dynamic behavior of bridge girder for high speed railway[J]. Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, 1976, 1976(256): 35-47. (in Japanese)
- [5] Ramondenc P. Vom einfluß hoher geschwindigkeiten auf den entwurf von Eisenbahnbrücken am beispiel der Stahlbrücken auf der hochgeschwindigkeitsstrecke (HGS) des TGV Méditerranée[J]. Stahlbau, 1998, 67(8): 652-658. Ramondenc P. From the influence of high speeds on the design of railway bridges in the example of steel bridges on the high-speed line (HGS) of the TGV Méditerranée [J]. Stahlbau, 1998, 67(8): 652-658.
- [6] Goicolea-Ruigómez J. Service limit states for railway bridges in new Design Codes IAPF and Eurocodes[C]//Track-Bridge Interaction on High-Speed Railways. Taylor & Francis, 2008: 17-28.
- [7] ERRI D214 Design of railway bridges for speed up to 350 km/h; dynamic loading effects including resonance [S].
- [8] EN B S. 2. Eurocode 1: Actions on structures-Part 2: Traffic loads on bridges[S].
- [9] Yang Y B, Yao Z D, Wu Y S. Vehicle-bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways [M]. River Edge, NJ: World Scientific, 2004.
- [10] Yang Y B, Lin B H. Vehicle-bridge interaction analysis by dynamic condensation method[J]. Journal of Structural Engineering, 1995, 121(11): 1636-1643.
- [11] Yang Y B, Liao S S, Lin B H. Impact formulas for vehicles moving over simple and continuous beams[J]. Journal of Structural Engineering, 1995, 121(11): 1644-1650.
- [12] Yang Y B, Yau J D, Hsu L C. Vibration of simple beams due to trains moving at high speeds[J]. Engineering Structures, 1997, 19(11): 936-944.
- [13] Yau J D, Yang Y B, Kuo S R. Impact response of high speed rail bridges and riding comfort of rail cars[J]. Engineering Structures, 1999, 21(9): 836-844.
- [14] Museros P, Alarcón E. Influence of the second bending mode on the response of high-speed bridges at resonance [J]. Journal of Structural Engineering, 2005, 131(3): 405-415.
- [15] Cho J R, Jung K, Cho K, et al. Determination of the optimal span length to minimize resonance effects in bridges on high-speed lines[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit, 2016, 230(2): 335-344.
- [16] Yang Y B, Yau J D, Urushdaze S, et al. Historical review on resonance and cancellation of simply supported beams subjected to moving train loads: from theory to practice[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2023, 23(16n18): 2340008.
- [17] 张楠, 郭薇薇, 夏禾. 高速铁路车桥耦合动力学[M]. 北京: 北京交通大学出版社, 2018. Zhang N, Guo W W, Xia H. Vehicle-bridge coupling dynamics of high-speed railway [M]. Beijing: Beijing Jiaotong University Press, 2018.
- [18] 陈醉, 刘学毅, 胡颖, 等. CRTS II 型轨道板的高频振动疲劳特性分析[J]. 西南交通大学学报, 2022, 57(1): 106-111, 119. Chen Z, Liu X Y, Hu Y, et al. Fatigue characteristic of high-frequency vibration for CRTS II track slab[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2022, 57(1): 106-111, 119. (in Chinese)
- [19] 邹小魁, 吕定花. 双块式无砟轨道的共振性能分析[J]. 铁道建筑, 2010, 50(10): 103-105.

- Zou X K, Lyu D H. Resonance performance analysis of double-block ballastless track[J]. *Railway Engineering*, 2010, 50(10): 103-105. (in Chinese)
- [20] Wang Z L, Tan Z X, Chen L, et al. Internal and external cancellation conditions for free vibration of damped simple beams traversed by successive moving loads[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2023, 23(16n18): 2340007.
- [21] Museros P, Moliner E, Martínez-Rodrigo M D. Free vibrations of simply-supported beam bridges under moving loads: maximum resonance, cancellation and resonant vertical acceleration[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(2): 326-345.
- [22] Arvidsson T, Karoumi R. Train-bridge interaction: a review and discussion of key model parameters[J]. *International Journal of Rail Transportation*, 2014, 2(3): 147-186.
- [23] 夏禾, 郭薇薇, 张楠. 车桥系统共振机理和共振条件分析[J]. *铁道学报*, 2006, 28(5): 52-58.
Xia H, Guo W W, Zhang N. Analysis of resonance mechanism and conditions of train-bridge system[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2006, 28(5): 52-58. (in Chinese)
- [24] Mao L, Lu Y. Critical speed and resonance criteria of railway bridge response to moving trains[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2013, 18(2): 131-141.
- [25] Doménech A, Museros P, Martínez-Rodrigo M D. Influence of the vehicle model on the prediction of the maximum bending response of simply-supported bridges under high-speed railway traffic[J]. *Engineering Structures*, 2014, 72: 123-139.
- [26] Afghani Khoraskani R, Mofid M, Eftekhari Azam S, et al. A new simplified formula in prediction of the resonance velocity for multiple masses traversing a thin beam[J]. *Scientia Iranica*, 2016, 23(1): 133-141.
- [27] Biondi B, Muscolino G, Sofi A. A substructure approach for the dynamic analysis of train-track-bridge system[J]. *Computers & Structures*, 2005, 83(28/29/30): 2271-2281.
- [28] Lou P. Finite element analysis for train-track-bridge interaction system[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2007, 77(10): 707-728.
- [29] Yang Y B, Yau J D. Vertical and pitching resonance of train cars moving over a series of simple beams[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 337: 135-149.
- [30] Zhai W M, et al. Train-track-bridge dynamic interaction: a state-of-the-art review[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2019, 57(7): 984-1027.
- [31] Bashmal S. Determination of critical and cancellation speeds of Euler-bernoulli beam subject to a continuously moving load[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2019, 19(3): 1950030.
- [32] Sudheesh Kumar C P, Sujatha C, Shankar K. Vibration of simply supported beams under a single moving load: a detailed study of cancellation phenomenon[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, 99: 40-47.
- [33] Yang Y B, Wu C M, Yau J D. Dynamic response of a horizontally curved beam subjected to vertical and horizontal moving loads[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 242(3): 519-537.
- [34] Zeng Q, Yang Y B, Dimitrakopoulos E G. Dynamic response of high speed vehicles and sustaining curved bridges under conditions of resonance[J]. *Engineering Structures*, 2016, 114: 61-74.
- [35] 李建中, 苏木标. 多个移动荷载作用下简支梁竖向共振机理研究[J]. *工程力学*, 1998, 15(增刊3): 614-620.
Li J Z, Su M B. Study on vertical resonance mechanism of simply supported beam under multiple moving loads[J]. *Engineering Mechanics*, 1998, 15(S3): 614-620. (in Chinese)
- [36] 苏木标, 李建中, 梁志广. 高速铁路简支梁桥的竖向共振现象[J]. *工程力学*, 2001, 18(5): 84-94.
Su M B, Li J Z, Liang Z G. Vertical resonance phenomenon of simply supported girder bridges on high-speed railway[J]. *Engineering Mechanics*, 2001, 18(5): 84-94. (in Chinese)
- [37] 苏木标, 李建中, 邹振祝. 铁路简支梁桥竖向共振影响因素的分析[J]. *工程力学*, 2003, 20(4): 60-66.
Su M B, Li J Z, Zou Z Z. Analysis of the factors influencing vertical resonance of simply supported railway girders[J]. *Engineering Mechanics*, 2003, 20(4): 60-66. (in Chinese)
- [38] Li J Z, Su M B. The resonant vibration for a simply supported girder bridge under high-speed trains[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 224(5): 897-915.
- [39] 夏禾. 车辆与结构动力相互作用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
Xia H. Dynamic interaction between vehicle and structure [M]. Beijing: Science Press, 2002. (in Chinese)
- [40] 王昆鹏, 夏禾, 郭薇薇, 等. 移动荷载列作用下简支梁振动响应参数研究[J]. *振动工程学报*, 2014, 27(3): 362-369.
Wang K P, Xia H, Guo W W, et al. Dynamic response parameter analyses of simply supported beam under moving load series[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2014, 27(3): 362-369. (in Chinese)
- [41] Xia H, Zhang N, Guo W W. Analysis of resonance mechanism and conditions of train-bridge system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 297(3/4/5): 810-822.
- [42] Xia H, Li H L, Guo W W, et al. Vibration resonance

- and cancellation of simply supported bridges under moving train loads[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2014, 140(5): 04014015.
- [43] 李慧乐, 夏禾, 郭薇薇. 简支梁在列车荷载下的共振与消振效应[J]. *振动工程学报*, 2014, 27(2): 172-179.
Li H L, Xia H, Guo W W. Effects of vibration resonance and cancellation for simple beams under train load [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2014, 27(2): 172-179. (in Chinese)
- [44] 李慧乐, 夏禾, 郭薇薇. 移动荷载作用下简支梁共振与消振机理研究[J]. *工程力学*, 2013, 30(7): 47-54.
Li H L, Xia H, Guo W W. Study on mechanism of resonance and vibration cancellation for simply-supported beam under moving loads[J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(7): 47-54. (in Chinese)
- [45] 李锦华, 李添艺, 吴亮秦, 等. 移动荷载下高速铁路简支梁桥消振机理频域分析[J]. *振动与冲击*, 2021, 40(16): 287-293.
Li J H, Li T Y, Wu L Q, et al. Frequency-domain analysis of vibration cancellation mechanism for a simply supported bridge of high-speed railway under moving loads[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, 40(16): 287-293. (in Chinese)
- [46] Li J H, Zhang H T, Zhu D S, et al. A moving load amplitude spectrum for analyzing the resonance and vibration cancellation of simply supported bridges under moving loads[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2022, 92: 104428.
- [47] Lu Y, Mao L, Woodward P. Frequency characteristics of railway bridge response to moving trains with consideration of train mass[J]. *Engineering Structures*, 2012, 42: 9-22.
- [48] Wang Y J, Yau J D, Shi J, et al. Double sub-resonance mechanism in torsional-flexural vibrations of a double-track short bridge under a moving train[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2022, 22 (16): 2271005.
- [49] Ma F B, Feng D M, Zhang L, et al. Numerical investigation of the vibration performance of elastically supported bridges under a moving vehicle load based on impact factor[J]. *International Journal of Civil Engineering*, 2022, 20(10): 1181-1196.
- [50] Yang Y B, Wang Z L, Yao H, et al. Weak-end and frequency detection of elastically supported bridges by contact residual response of two-axle test vehicle in a round trip[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2023, 28 (3): 06023001.
- [51] 王志鲁, 杨永斌, 姚华, 等. 不等支承刚度条件下桥梁-车辆动力耦合解析理论及应用[J]. *中国公路学报*, 2023, 36(3): 165-176.
- Wang Z L, Yang Y B, Yao H, et al. Analytical theory and application of vehicle-bridge interaction dynamics under unequal support stiffnesses[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2023, 36(3): 165-176. (in Chinese)
- [52] Shi Z H, Uddin N. Theoretical vehicle bridge interaction model for bridges with non-simply supported boundary conditions[J]. *Engineering Structures*, 2021, 232: 111839.
- [53] Yau J D, Wu Y S, Yang Y B. Impact response of bridges with elastic bearings to moving loads[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 248(1): 9-30.
- [54] Yang Y B, Lin C L, Yau J D, et al. Mechanism of resonance and cancellation for train-induced vibrations on bridges with elastic bearings[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 269(1/2): 345-360.
- [55] 陈雷, 杨永斌, 王志鲁, 等. 弹性支承边界条件对桥梁共振与消振的影响机理分析[J]. *土木工程学报*, 2024, 57(6): 13-25.
Chen L, Yang Y B, Wang Z L, et al. Mechanism analysis of influence of elastic support boundary conditions on bridge resonance and cancellation[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2024, 57(6): 13-25. (in Chinese)
- [56] Yang Y B, Chen L, Wang Z L, et al. Cancellation of resonance for elastically supported beams subjected to successive moving loads: optimal design condition for bridges[J]. *Engineering Structures*, 2024, 307: 117950.
- [57] 陆建飞, 吴嘉彬, 沙萱. 系列移动荷载下周期性弹性支撑连续梁的共振及消振效应[J]. *河海大学学报(自然科学版)*, 2016, 44(2): 141-148.
Lu J F, Wu J B, Sha X. Resonance and cancellation effects of periodically elastically supported continuous beam under a series of moving loads[J]. *Journal of Hohai University (Natural Sciences)*, 2016, 44(2): 141-148. (in Chinese)
- [58] 战家旺, 苗慧磊, 王昱杰, 等. 基于简化模型的铁路简支梁桥横向振动分析方法[J]. *铁道学报*, 2023, 45(9): 178-184.
Zhan J W, Miao H L, Wang Y J, et al. Analysis method of lateral vibration of simply supported railway bridge based on simplified model[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2023, 45(9): 178-184. (in Chinese)
- [59] Zangeneh A, Museros P, Pacoste C, et al. Free vibration of viscoelastically supported beam bridges under moving loads: closed-form formula for maximum resonant response[J]. *Engineering Structures*, 2021, 244: 112759.
- [60] El Hankari S, Dkiouak R, Roky K. Resonance and cancellation phenomena in partially clamped simply supported beam bridges under moving trains[J]. *Structures*, 2022, 41: 1247-1256.

- [61] Zhang Y T, Jiang L, Zhou W, et al. Study of resonance condition of railway bridge subjected to train loads with a four-beam system[J]. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2023, 51(3): 1468-1488.
- [62] Nikkhoo A, Ebrahimzadeh Hassanabadi M, Eftekhari Azam S, et al. Vibration of a thin rectangular plate subjected to series of moving inertial loads[J]. *Mechanics Research Communications*, 2014, 55: 105-113.
- [63] Hassanabadi M E, Attari N K A, Nikkhoo A, et al. Resonance of a rectangular plate influenced by sequential moving masses[J]. *Coupled Systems Mechanics*, 2016, 5 (1): 87-100.
- [64] Martínez-Rodrigo M D, Moliner E, Romero A, et al. Maximum resonance and cancellation phenomena in orthotropic plates traversed by moving loads: Application to railway bridges[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 169: 105316.
- [65] Torkan E, Pirmoradian M, Hashemian M. On the parametric and external resonances of rectangular plates on an elastic foundation traversed by sequential masses[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2018, 88(8): 1411-1428.
- [66] Moliner E, Martínez-Rodrigo M D, Museros P. Dynamic performance of existing double track railway bridges at resonance with the increase of the operational line speed [J]. *Engineering Structures*, 2017, 132: 98-109.
- [67] Ju S H, Lin H T. Numerical investigation of a steel arch bridge and interaction with high-speed trains[J]. *Engineering Structures*, 2003, 25(2): 241-250.
- [68] Lacarbonara W, Colone V. Dynamic response of arch bridges traversed by high-speed trains[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 304(1/2): 72-90.
- [69] Gu G M. Resonance in long-span railway bridges carrying TGV trains[J]. *Computers & Structures*, 2015, 152: 185-199.
- [70] Yau J D, Fryba L. Response of suspended beams due to moving loads and vertical seismic ground excitations[J]. *Engineering Structures*, 2007, 29(12): 3255-3262.
- [71] Lu L, Li J Z. Longitudinal vibration and its suppression of a railway cable-stayed bridge under vehicular loads[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2018, 18(4): 1850052.
- [72] 宁晓骏, 叶燎原, 缪昇. 高速铁路中桥梁跨径布置与共振关系的探讨[J]. *振动与冲击*, 2000, 19(3): 71-73, 88. Ning X J, Ye L Y, Miao S. Research on the relationship between the bridge span arrangement in high railway and the bridge resonance[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2000, 19(3): 71-73, 88. (in Chinese)
- [73] Yau J D. Resonance of continuous bridges due to high speed trains[J]. *Journal of Marine Science and Technology*, 2001, 9(1): 2.
- [74] Kwark J W, Choi E S, Kim Y J, et al. Dynamic behavior of two-span continuous concrete bridges under moving high-speed train[J]. *Computers & Structures*, 2004, 82(4/5): 463-474.
- [75] 田杰, 许克宾. 高速铁路简支梁桥等跨布置的理论研究[J]. *铁道工程学报*, 2001, 18(3): 51-55. Tian J, Xu K B. Research on simply supported beams with equal span on high speed railways[J]. *Journal of Railway Engineering Society*, 2001, 18(3): 51-55. (in Chinese)
- [76] Ju S H, Lin H T. Resonance characteristics of high-speed trains passing simply supported bridges[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 267(5): 1127-1141.
- [77] Yang Y B, Yau J D. Resonance of high-speed trains moving over a series of simple or continuous beams with non-ballasted tracks[J]. *Engineering Structures*, 2017, 143: 295-305.
- [78] Yau J D. Suppression of train-induced vibrations of continuous truss bridges by hybrid TMDs[C]//Proc. of the 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics with CD-ROM, Warsaw, Poland, 2004: 11287-11288.
- [79] Wang Y J, Wei Q C, Shi J, et al. Resonance characteristics of two-span continuous beam under moving high speed trains[J]. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2010, 7(2): 185-199.
- [80] Martínez-Rodrigo M D, Andersson A, Pacoste C, et al. Resonance and cancellation phenomena in two-span continuous beams and its application to railway bridges[J]. *Engineering Structures*, 2020, 222: 111103.
- [81] Xin L F, Mu D, Choi D H, et al. General conditions for the resonance and cancellation of railway bridges under moving train loads[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, 183: 109589.
- [82] Yau J D, Yang Y B. Vertical accelerations of simple beams due to successive loads traveling at resonant speeds[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 289(1/2): 210-228.
- [83] 孟鑫. 高速铁路常用跨度简支箱梁竖向共振条件分析[J]. *振动与冲击*, 2019, 38(23): 19-24, 32. Meng X. Vertical resonance condition analysis for simply supported box girder with common span used in high speed railway[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(23): 19-24, 32. (in Chinese)
- [84] 杨宏印, 吴楠昊, 曹鸿猷, 等. 基于自由振动的高速铁路简支梁桥共振与消振速度研究[J]. *计算力学学报*, 2023, 40(5): 749-756. Yang H Y, Wu N H, Cao H Y, et al. Research on resonance and cancellation speed of simply supported girder bridge of high-speed railway based on free vibration[J].

- Chinese Journal of Computational Mechanics, 2023, 40 (5): 749-756. (in Chinese)
- [85] Yau J D, Martínez-Rodrigo M D, Doménech A. An equivalent additional damping approach to assess vehicle-bridge interaction for train-induced vibration of short-span railway bridges[J]. Engineering Structures, 2019, 188: 469-479.
- [86] Stoura C D, Dimitrakopoulos E G. Additional damping effect on bridges because of vehicle-bridge interaction[J]. Journal of Sound and Vibration, 2020, 476: 115294.
- [87] Duan Y F, Wang S M, Yau J D. Vector form intrinsic finite element method for analysis of train-bridge interaction problems considering the coach-coupler effect[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2019, 19(2): 1950014.
- [88] Yang Y B, Yau J D, Urushadze S. Wave transmission of linked railcars moving over multi simple beams under dual resonance[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 452: 51-57.
- [89] 时瑾, 姚忠达, 王英杰. 二轴列车行经序列等跨桥时车辆共振响应分析[J]. 振动与冲击, 2019, 38(5): 237-242, 258.
- Shi J, Yau J D, Wang Y J. Resonance responses of vehicle during a two-axle train passing through sequential equal-span bridges[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(5): 237-242, 258. (in Chinese)
- [90] Matsuoka K, Kaito K, Sogabe M. Bayesian time-frequency analysis of the vehicle-bridge dynamic interaction effect on simple-supported resonant railway bridges[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, 135: 106373.
- [91] Lou P, Yau J D, Au F T K, et al. Shifted resonance of railway bridges under trains passing by each other[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2022, 22(7): 2271001.
- [92] Wu Z Z, Zhang N, Yao J B, et al. Wavelet time-frequency analysis on bridge resonance in train-track-bridge interactive system[J]. Applied Sciences, 2022, 12(12): 5929.
- [93] 王英杰, 时瑾, 魏庆朝. 单车过桥下弹性车体共振与消振现象分析[J]. 振动与冲击, 2015, 34(2): 1-8.
- Wang Y J, Shi J, Wei Q C. Resonance and vibration cancellation analysis of a vehicle with flexible car body moving over multi-span bridge[J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(2): 1-8. (in Chinese)
- [94] 杨宏印, 曹鸿猷, 陈志军, 等. 高速铁路变截面梁桥车致振动及徐变影响分析[J]. 土木工程与管理学报, 2015, 32(2): 31-36.
- Yang H Y, Cao H Y, Chen Z J, et al. Analysis of vibration of non-uniform girder bridge under trains and influence of creep in high-speed railway[J]. Journal of Civil Engineering and Management, 2015, 32(2): 31-36. (in Chinese)
- [95] Ülker-Kaustell M, Karoumi R. Influence of non-linear stiffness and damping on the train-bridge resonance of a simply supported railway bridge[J]. Engineering Structures, 2012, 41: 350-355.
- [96] Tahiri M, Khamlichi A, Bezzazi M. Nonlinear analysis of the ballast influence on the train-bridge resonance of a simply supported railway bridge[J]. Structures, 2022, 35: 303-313.
- [97] Xin L F, Li X Z, Zhang J X, et al. Resonance analysis of train-track-bridge interaction systems with correlated uncertainties[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2020, 20(1): 2050008.
- [98] Zhang T, Jin T M, Luo J, et al. Stochastic analysis on the resonance of railway trains moving over a series of simply supported bridges[J]. Shock and Vibration, 2021, 2021(1): 1491207.
- [99] Xiang P, Yan W R, Jiang L Z, et al. Resonance analysis of a high-speed railway bridge using a stochastic finite element method[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2023, 22(4): 1015-1030.
- [100] Majka M, Hartnett M. Effects of speed, load and damping on the dynamic response of railway bridges and vehicles[J]. Computers & Structures, 2008, 86(6): 556-572.
- [101] Yau J D. Response of a train moving on multi-span railway bridges undergoing ground settlement[J]. Engineering Structures, 2009, 31(9): 2115-2122.
- [102] Romero A, Solís M, Domínguez J, et al. Soil-structure interaction in resonant railway bridges[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2013, 47: 108-116.
- [103] Doménech A, Martínez-Rodrigo M D, Romero A, et al. Soil-structure interaction effects on the resonant response of railway bridges under high-speed traffic[J]. International Journal of Rail Transportation, 2015, 3 (4): 201-214.
- [104] Lu J F, Mei H, Zhong L. Dynamic response of a periodic viaduct to a moving loading with consideration of the pile-soil-structure interaction[J]. Acta Mechanica, 2015, 226(6): 2013-2034.
- [105] 程辉. 重载铁路连续刚构桥梁竖向共振监测分析[J]. 桥梁建设, 2015, 45(5): 19-23.
- Cheng H. Monitoring and analysis of vertical resonance of a heavy haul railway continuous rigid-frame bridge [J]. Bridge Construction, 2015, 45(5): 19-23. (in Chinese)
- [106] 杨宜谦, 张焜, 周宏业, 等. 用调频质量阻尼器抑制铁

- 路桥梁竖向共振的研究[J]. 中国铁道科学, 1998, 19(1): 12-18.
- Yang Y Q, Zhang D, Zhou H Y, et al. Study on the use of TMD in controlling the vertical resonance of railway bridges[J]. China Railway Science, 1998, 19(1): 12-18. (in Chinese)
- [107] 刘保东, 倪永军. 用黏弹性阻尼器抑制铁路钢桥车-桥共振[J]. 北方交通大学学报, 1999, 23(4): 18-21.
- Liu B D, Ni Y J. Vibration reduction of railway steel bridge excited by vehicles using viscoelastic damper[J]. Journal of Northern Jiaotong University, 1999, 23(4): 18-21. (in Chinese)
- [108] 郭文华, 路萍. TMD对高速列车通过简支箱梁桥时的振动控制研究[J]. 振动与冲击, 2008, 27(11): 42-45, 196-197.
- Guo W H, Lu P. Vibration suppression for simply supported bridges passed by high-speed trains using tuned mass dampers(TMD)[J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(11): 42-45, 196-197. (in Chinese)
- [109] Martínez-Rodrigo M D, Lavado J, Museros P. Dynamic performance of existing high-speed railway bridges under resonant conditions retrofitted with fluid viscous dampers[J]. Engineering Structures, 2010, 32(3): 808-828.
- [110] Wang Y J, Yau J, Wei Q C. Vibration suppression of train-induced multiple resonant responses of two-span continuous bridges using ve dampers[J]. Journal of Marine Science and Technology, 2013, 21(2): 149-158.
- [111] Lavado J, Doménech A, Martínez-Rodrigo M D. Dynamic performance of existing high-speed railway bridges under resonant conditions following a retrofit with fluid viscous dampers supported on clamped auxiliary beams[J]. Engineering Structures, 2014, 59: 355-374.
- [112] 李锦华, 管海平, 李春祥, 等. 高速铁路连续梁桥的共振响应与振动控制研究[J]. 计算力学学报, 2019, 36(4): 483-490.
- Li J H, Guan H P, Li C X, et al. Study on resonance response and vibration control of high speed railway continuous beam bridge[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2019, 36(4): 483-490. (in Chinese)
- [113] Yau J D, Urushadze S. Resonance reduction for linked train cars moving on multiple simply supported bridges [J]. Journal of Sound and Vibration, 2024, 568: 117963.
- [114] 高传伟, 唐雅茹, 余华. 基于移动荷载过桥的轨道交通桥梁振动研究[J]. 中国铁道科学, 2005, 26(2): 73-76.
- Gao C W, Tang Y R, Yu H. Study on the vibration of rail transit bridge based on moving load passing bridge [J]. China Railway Science, 2005, 26(2): 73-76. (in Chinese)
- [115] Shin J R, An Y K, Sohn H, et al. Vibration reduction of high-speed railway bridges by adding size-adjusted vehicles[J]. Engineering Structures, 2010, 32(9): 2839-2849.
- [116] 周长东, 刘斌. 简支铁路桥梁加固前后共振响应分析[J]. 铁道工程学报, 2015, 32(9): 60-66.
- Zhou C D, Liu B. Research on the resonance response of simply-supported railway bridge before and after reinforcement[J]. Journal of Railway Engineering Society, 2015, 32(9): 60-66. (in Chinese)
- [117] 张许. 后加钢支撑加固铁路既有简支桥梁共振响应分析[J]. 工程抗震与加固改造, 2023, 45(2): 118-127.
- Zhang X. Resonance analysis of existing simply-supported railway bridge strengthened with adding steel braces[J]. Earthquake Resistant Engineering and Retrofitting, 2023, 45(2): 118-127. (in Chinese)
- [118] Galvín P, Romero A, Moliner E, et al. Two FE models to analyse the dynamic response of short span simply-supported oblique high-speed railway bridges: Comparison and experimental validation[J]. Engineering Structures, 2018, 167: 48-64.
- [119] Galvín P, Romero A, Moliner E, et al. On the dynamic characterisation of railway bridges through experimental testing[J]. Engineering Structures, 2021, 226: 111261.
- [120] 张焜, 柯在田, 邓蓉, 等. 既有线提速至160km/h桥梁评估的研究[J]. 中国铁道科学, 1996, 17(1): 9-20.
- Zhang D, Ke Z T, Deng R, et al. Evaluation study on the behavior of existing bridges due to speed raise up to 160 km/h[J]. Zhongguo Tiedao Kexue, 1996, 17(1): 9-20. (in Chinese)
- [121] 谢毅, 严普强, 张焜, 等. 准高速列车下铁路桥梁振动特性的试验研究[J]. 振动与冲击, 1998, 17(1): 53-57.
- Xie Y, Yan P Q, Zhang D, et al. Measurement and analysis of bridge vibration when train passes by at a quasi-high-speed[J]. Journal of Vibration and Shock, 1998, 17(1): 53-57. (in Chinese)
- [122] 沈锐利. 高速铁路线上简支梁桥车桥共振问题初探[J]. 西南交通大学学报, 1995, 30(3): 275-282.
- Shen R L. Preliminary research of bridge-vehicle resonance on simple-supported beam bridges on high speed railways[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 1995, 30(3): 275-282. (in Chinese)
- [123] 郭薇薇, 夏禾, De Roeck Guido. 意大利高速铁路 Sesia 大桥的动力特性及车桥耦合振动分析[J]. 振动与冲击, 2013, 32(15): 82-88, 94.
- Guo W W, Xia H, Guido D. Dynamic characteristics and coupling vehicle-bridge vibration analysis of the high speed railway Sesia Bridge in Italy[J]. Journal of

- Vibration and Shock, 2013, 32(15): 82-88, 94. (in Chinese)
- [124] 刘鹏辉, 姚京川, 尹京, 等. 时速200~250 km高速铁路桥梁动力性能试验研究[J]. 土木工程学报, 2013, 46(3): 96-102.
- Liu P H, Yao J C, Yin J, et al. Experimental study on dynamic behavior of 200-250 km/h high-speed railway bridges[J]. China Civil Engineering Journal, 2013, 46(3): 96-102. (in Chinese)
- [125] 杨宜谦, 姚京川, 孟鑫, 等. 时速300~350 km高速铁路桥梁动力性能试验研究[J]. 中国铁道科学, 2013, 34(3): 14-19.
- Yang Y Q, Yao J C, Meng X, et al. Experimental study on dynamic behaviors of bridges for 300-350 km/h high speed railway[J]. China Railway Science, 2013, 34(3): 14-19. (in Chinese)
- [126] Sánchez-Haro J, Fernández B, Capellán G, et al. Simplified method to detect resonance effects in railway bridges. Viaduct over Aragón River and Almonte bridge application[J]. Engineering Structures, 2024, 305: 117668.
- [127] 丁幼亮, 王超, 赵瀚玮, 等. 基于加速度监测的大胜关大桥车-桥共振分析[J]. 铁道工程学报, 2016, 33(9): 48-54.
- Ding Y L, Wang C, Zhao H W, et al. Vehicle-bridge resonance analysis of Dashengguan bridge based on vibration acceleration monitoring[J]. Journal of Railway Engineering Society, 2016, 33(9): 48-54. (in Chinese)
- (编辑 王秀玲)