



考虑弹塑性变形的非饱和土地基超静孔隙压力

夏琼^{a,b}, 辛佳璐^b, 满本轩^b, 刘德仁^b

(兰州交通大学 a. 土木工程国家级实验教学示范中心; b. 土木工程学院, 兰州 730070)

摘要: 非饱和地基在瞬时局部加载作用下的力学响应特性是岩土工程领域的研究热点。基于 Fredlund 双应力变量理论与非饱和土弹塑性本构模型, 建立考虑弹塑性应变的非饱和土全耦合固结理论, 采用 COMSOL 多物理场耦合软件进行数值模拟, 分析瞬时局部加载下非饱和地基初始超静孔隙压力分布、消散规律及塑性区发展规律, 研究弹塑性应变与超静孔隙压力分布及消散的全耦合机制。结果表明: 初始超静孔隙水压力空间分布与地基土体积应变类型相关, 弹性应变状态下, 荷载作用范围内超静孔隙水压力随深度递减, 范围外浅层出现负值; 塑性区超静孔隙水压力显著高于弹性区, 且与塑性压缩体积应变呈正相关; 荷载大小与加载宽度影响塑性区发展, 局部荷载下塑性区可能自地表向下或自基底向上发展, 两者贯通后超静孔隙压力沿深度分布规律与基底向上发展的塑性应变一致; 弹塑性交界区超静孔隙压力消散过程中出现两次曼代尔-克雷尔效应。

关键词: 非饱和土固结; 弹塑性变形; 局部荷载; 超静孔隙压力; 消散规律

中图分类号: TU431 **文献标志码:** A **文章编号:** 2096-6717(XXXX)XX-0001-11

Excess pore pressure in unsaturated soil foundations considering elastoplastic deformation

XIA Qiong^{a,b}, XIN Jialu^b, MAN Benxuan^b, LIU Deren^b

(a. National Demonstration Center for Experimental Civil Engineering Education; b. School of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, P. R. China)

Abstract: The mechanical response characteristics of unsaturated foundations under instantaneous local loading are a research focus in the field of geotechnical engineering. By employing Fredlund's dual stress variable theory and an elastoplastic constitutive model for unsaturated soils, a fully coupled consolidation theory for unsaturated soils considering elastoplastic strain was established. Numerical simulations were conducted using COMSOL Multiphysics software, analyzing the initial excess pore pressure distribution, dissipation patterns, and development rules of plastic zones in unsaturated foundations under instantaneous local loads, and investigating the fully coupled mechanism between elastoplastic strain and excess pore pressure distribution and dissipation. The results indicate that the spatial distribution of initial excess pore water pressure is related to the volumetric strain type of the foundation soil. Under elastic strain conditions, excess pore water pressure within the loading area decreases with depth, while negative values appear in the shallow layers outside the loading region. The excess pore water pressure in plastic zones is significantly higher than in elastic zones and positively correlated

收稿日期: 2025-08-09

基金项目: 国家自然科学基金(42362033)

作者简介: 夏琼(1977-), 女, 博士, 副教授, 主要从事土力学与地基基础研究, E-mail: xemily@163.com.

Received: 2025-08-09

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (No. 42362033)

Author brief: XIA Qiong (1977-), PhD, associate professor, main research interest: soil mechanics and foundation engineering, E-mail: xemily@163.com.

with plastic volumetric compression strain. The magnitude and width of the load affect the development of plastic zones. Under local loading, plastic zones may develop downward from the surface or upward from the base; once they connect, the depth distribution of excess pore water pressure aligns with the development of plastic strain from the base upward. During dissipation in the elastoplastic interface zone, two instances of the Mandel-Cryer effect were observed.

Keywords: consolidation of unsaturated soils; elastoplastic deformation; local loads; excess pore pressure; dissipation patterns

在建筑、道路、铁路等土木工程建设中,非饱和土广泛分布于地基、边坡及填方等工程场景。为提升地基承载力、控制后期沉降,工程中常采用堆载预压、真空预压等方法处理非饱和土地基^[1]。荷载作用下,非饱和土体内会产生超静孔隙压力,其消散过程直接决定地基固结沉降的速率与最终变形量,进而影响工程结构的长期稳定性与安全性^[2]。以 Terzaghi 为代表的饱和土固结理论虽已发展成熟,但非饱和土由固、液、气三相介质组成,其固结过程不仅涉及超孔隙水压力的消散,还伴随超孔隙气压力的迁移与扩散,且气液两相运动与土骨架变形存在强耦合效应^[3],远超饱和土固结的复杂性。若仍采用饱和土固结理论分析非饱和土问题,将因忽略气相作用与多相耦合机制导致显著误差^[4]。因此,建立符合非饱和土多相特性的固结理论,揭示超静孔隙压力的分布与消散规律,成为工程实践与学术研究的核心需求。

Fredlund 等^[5]基于气液两相连续介质假设,建立非饱和土一维固结理论,提出描述超孔隙气、水压力消散的控制方程,实现了从饱和土向非饱和土固结理论的平稳过渡,为后续研究奠定基础。学者在 Fredlund 理论框架下进一步拓展研究边界。沈珠江^[6]提出非饱和土简化固结方程,将吸力与净应力作为独立变量,降低工程应用难度;秦爱芳等^[7-8]通过 Laplace 变换与特征函数展开法,推导不同边界条件(如单面透气透水、混合边界)下非饱和土固结的解析解,验证了边界渗透特性对空压消散的显著影响;周万欢等^[9-10]引入中间变量实现非饱和土固结方程解耦,采用差分求积法得到复杂初始条件下的数值解,揭示初始空压非均匀分布对固结路径的影响。

近年来,非饱和土固结研究逐渐向多场耦合、非线性变形与复杂荷载条件拓展,Ho 等^[11]提出考虑涂抹效应的非饱和土轴对称固结等应变解析解,揭示了涂抹参数、水力传导率比对超孔隙压力消散及平均固结度的影响规律。朱合华等^[12]开发多场耦合数值平台,实现降雨入渗、冻融循环等环境下非饱和土长期变形预测;吴意谦等^[13]考虑疏干带非饱和

土影响,提出基坑降水地面沉降计算方法,明确孔压消散与有效应力增长的定量关系;叶梓等^[14]扩展精细积分法,实现变荷载下层状非饱和土地基全耦合固结的高效求解,发现局部荷载下初始孔压分布呈现显著应力集中效应;Lo 等^[15]针对上非饱和-下饱和双层土,基于多孔弹性理论建立完全透水边界边值问题,推导解析解并对比半透水边界结果,明确边界排水条件的影响,解析解可作数值模型验证基准。

然而,现有研究多基于弹性本构模型假设,忽略非饱和土在荷载作用下的塑性变形特性。对于膨胀土、湿陷性黄土等特殊土类,塑性变形不仅改变土骨架的渗透特性,还会通过应力重分布影响超静孔隙压力的时空演化^[16]。胡小荣等^[17]提出正常固结非饱和黏性土的三剪弹塑性本构模型,为考虑塑性变形的固结分析提供理论基础;Shwan 等^[18]通过 CT 扫描技术揭示非饱和砂在循环荷载下塑性区扩展与孔压累积的强相关性;Niu 等^[19]推导通用边界条件下非饱和土固结解,为复杂边界与塑性变形的耦合分析提供数学工具;Huang 等^[20]采用特征函数展开法求解半渗透边界下非饱和土固结问题,进一步完善边界条件与变形特性的耦合机制;凌道盛等^[21]用非齐次边界齐次化与特征函数展开法求解验证并分析边界条件影响,明确了边界条件对非饱和土固结特性的作用规律。

当前,局部荷载下非饱和土地基的弹塑性变形与超静孔隙压力耦合机制仍缺乏系统性研究:一方面,不同荷载下非饱和土固结的初始条件确定及固结沉降耦合分析仍存在不足,难以揭示局部应力集中引发的局部化弹塑性应变与超静孔隙压力之间的关系;另一方面,针对超静孔隙压力消散与塑性区扩展之间的动态反馈机制,尚未形成系统性的理论认知体系。基于此,笔者结合 Fredlund 双应力变量理论与 BBM 非饱和土弹塑性本构模型,建立考虑弹塑性变形的非饱和土全耦合固结理论,通过 COMSOL 多物理场数值模拟,分析瞬时局部加载下初始超静孔隙压力分布、消散规律及塑性区发展特征,揭示弹塑性应变与超静孔隙压力的全耦合

机制。

1 非饱和土固结模型

基于 Fredlund 双应力变量理论与 BBM 弹塑性本构模型,构建考虑弹塑性变形的非饱和土固结模型。通过引入净应力 p 和基质吸力 s 作为独立应力变量,建立非饱和土气液两相渗流控制方程。结合质量守恒定律与 Darcy-Fick 定律,推导液相与气相的质量守恒方程,并通过弹塑性应变分解实现变形与渗流的动态耦合。

基于如下假设建立考虑弹塑性应变非饱和土固结变形耦合模型:

- 1) 非饱和土体中的土颗粒和水不可压缩;
- 2) 气相、液相相互独立且连续;
- 3) 土体的体积变化系数为常数;
- 4) 不考虑气体溶解水和水汽蒸发。

Fredlund 提出的双应力变量理论,选用净应力 p 与基质吸力 s 作为应力状态变量,建立了非饱和土固结方程,见式(1)、式(2)。

$$\frac{\partial u_w}{\partial t} = -C_w \frac{\partial u_a}{\partial t} + c_{vx}^w \frac{\partial^2 u_w}{\partial x^2} + c_{vz}^w \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = -C_a \frac{\partial u_w}{\partial t} + c_{vx}^a \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} + c_{vz}^a \frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2} \quad (2)$$

式中:

$$C_w = \frac{1 - m_2^w / m_1^w}{m_2^w / m_1^w} \quad (3)$$

$$C_a = \frac{\frac{m_2^a}{m_1^a}}{1 - \frac{m_2^a}{m_1^a} - \frac{(1 - S_r)n}{\bar{u}_a m_1^a}} \quad (4)$$

$$c_{vx}^w = \frac{k_{wx}}{\rho_w g m_2^w} \quad (5)$$

$$c_{vz}^w = \frac{k_{wz}}{\rho_w g m_2^w} \quad (6)$$

$$c_{vx}^a = \frac{k_{ax} RT}{g[(2m_1^a - m_2^a)\bar{u}_a - (1 - S_r)n]\omega_a} \quad (7)$$

$$c_{vz}^a = \frac{k_{az} RT}{g[(2m_1^a - m_2^a)\bar{u}_a - (1 - S_r)n]\omega_a} \quad (8)$$

式中: C_w 、 C_a 为液相气相的相互作用常数,见式(3)、式(4); c_{vx}^w 、 c_{vz}^w 、 c_{vx}^a 、 c_{vz}^a 为液相气相分别在 x 和 z 方向的固结系数,见式(5)~式(8); m_1^w 、 m_1^a 、 m_2^w 、 m_2^a 分别为净法向应力变化 $d(\sigma - u_a)$ 和基质吸力变化 $d(u_a - u_w)$ 液相、气相的体积变化系数; k_{wx} 、 k_{wz} 、 k_{ax} 和 k_{az} 分别为液相、气相在 x 方向和 z 方向上的渗透系数; ρ_w 为水的密度; g 为重力加速度; S_r 为饱和度; n 为孔隙率; $\bar{u}_a$ 为绝对气体压力,

$\bar{u}_a = u_a + p_{at}$, p_{at} 为大气压; ω_a 为气体的平均摩尔质量; R 为气体常数; T 为绝对温度。

在 Alonso 等^[22]的研究中,BBM 非饱和土弹塑性本构模型涉及 4 个应力状态变量,分别为净应力 p 、剪应力 q 、基质吸力 s 和比体积 v ,其中基质吸力 s 在数值上可表示为式(9)。 p - q 平面内屈服函数见式(10), p - s 平面内屈服函数见式(11),SI 屈服线由式(12)表示。

$$s = s_0 + u_a - u_w \quad (9)$$

$$f_{pq} = q^2 - M^2(p + p_s)(p_0 - p) \quad (10)$$

$$f_{LC} = \frac{p_0}{p^c} = \left(\frac{p_0^*}{p^c} \right)^{[\lambda(0) - \kappa]/[\lambda(s) - \kappa]} \quad (11)$$

$$f_{SI}(s, s_c) = s - s_c \quad (12)$$

式中: s_0 为初始吸力; u_w 为超静孔隙水压力; u_a 为超静孔隙气压力; p_s 为吸力引起的黏聚力的增加; p_0 为一定吸力下土体的先期固结压力; M 为临界状态线的斜率; p^c 为参考应力; p_0^* 为饱和土体的先期固结压力; $\lambda(s)$ 为 v - $\ln p$ 坐标系中正常固结线的斜率, $\lambda(s) = \lambda(0)[(1 - r)e^{-\beta s} + r]$, $\lambda(0)$ 为饱和土的正常固结线的斜率; r 为体现土体最大刚度的一个常数; β 为控制土体刚度随吸力增长速率的参数; κ 为净应力变化引起的弹性刚度参数; s_c 为硬化参数,即土体历史最大吸力值。

为描述塑性应变增量的方向和大小,引入非关联的流动性法则,通过式(13)计算由净应力引起的塑性与弹性体积应变组成的总的体积应变;塑性体积应变可由式(14)计算。式(15)表示由吸力引起的总的体积应变,吸力引起塑性应变可由式(16)表示。

$$d\epsilon_{vp} = d\epsilon_{vp}^p + d\epsilon_{vp}^e = \frac{\lambda(s)}{v} \frac{dp_0}{p_0} \quad (13)$$

$$d\epsilon_{vp}^p = \frac{\lambda(s) - \kappa}{v} \frac{dp_0}{p_0} \quad (14)$$

$$d\epsilon_{vs} = \frac{\lambda_s}{v} \frac{ds}{(s + p_{at})} \quad (15)$$

$$d\epsilon_{vs}^p = \frac{\lambda_s - \kappa_s}{v} \frac{ds}{(s + p_{at})} \quad (16)$$

式中: $d\epsilon_{vp}$ 、 $d\epsilon_{vs}$ 分别为当净应力 p 和基质吸力 s 达到土体的屈服应力引起总体积应变; $d\epsilon_{vp}^p$ 、 $d\epsilon_{vp}^e$ 分别为净应力 p 变化引起的塑性体积应变、弹性体积应变; $d\epsilon_{vs}^p$ 为基质吸力 s 变化引起的塑性体积应变; κ_s 为吸力变化引起的弹性刚度参数。

根据质量守恒定律,且液相渗流符合 Darcy 定律,气相渗流符合 Fick 定律;式(17)、式(18)将液相、气相的变化量用孔隙水、孔隙气的变化量表示。

根据 Boyle 定律,在定量定温下,理想气体的体积与气体的压强成反比,可用式(19)表示,将式(19)代入式(18),整理可得气体变化量的表达式(20)。

$$\frac{\partial \epsilon_{vw}}{\partial t} = \frac{k_w}{\gamma_w} \nabla^2 u_w \quad (17)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{va}}{\partial t} + \frac{V_a}{\bar{u}_a V} \frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{RT}{\omega_a} \frac{k_a}{g \bar{u}_a} \nabla^2 u_a \quad (18)$$

$$\frac{V_a}{\bar{V}_a^0} = \frac{\bar{u}_a^0}{\bar{u}_a} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{va}}{\partial t} = \frac{k_a RT}{g \bar{u}_a^0 \omega_a} \nabla^2 u_a - \frac{\bar{u}_a^0 n_0 (1 - S_{r0})}{\bar{u}_a^2} \frac{\partial u_a}{\partial t} \quad (20)$$

式中: V_a 为空气的体积,可以用土体的体积表示: $V_a = (1 - S_r) n V$, V 为土体体积。 ϵ_{vw} 为液相的变化量, ϵ_{va} 为气相的变化量。

BBM 模型将总的体积应变分为由净应力和吸力引起的应变,为研究液相、气相对体积应变的影响,式(21)将体积应变分为由净应力和吸力引起的液相、气相应变,各部分应变的比例关系遵循 Fredlund 提出的体积变化系数,其变化量可以用式(22)、式(23)表示,其对时间的求导见式(24)、式(25)。

$$\begin{cases} \epsilon_v = \epsilon_{vp} + \epsilon_{vs} \\ \epsilon_{vp} = \epsilon_{vwp} + \epsilon_{vap} \\ \epsilon_{vs} = \epsilon_{vws} + \epsilon_{vas} \end{cases} \quad (21)$$

$$\epsilon_{vw} = \epsilon_{vwp} + \epsilon_{vws} = \frac{\alpha_1 \epsilon_{vp}}{1 + \alpha_1} + \frac{\alpha_2 \epsilon_{vs}}{1 + \alpha_2} \quad (22)$$

$$\epsilon_{va} = \epsilon_{vap} + \epsilon_{vas} = \frac{\epsilon_{vp}}{1 + \alpha_1} + \frac{\epsilon_{vs}}{1 + \alpha_2} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{vw}}{\partial t} = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \frac{\partial \epsilon_{vp}}{\partial t} + \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \frac{\partial \epsilon_{vs}}{\partial t} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{va}}{\partial t} = \frac{1}{1 + \alpha_1} \frac{\partial \epsilon_{vp}}{\partial t} + \frac{1}{1 + \alpha_2} \frac{\partial \epsilon_{vs}}{\partial t} \quad (25)$$

式中: ϵ_{vwp} 、 ϵ_{vap} 、 ϵ_{vws} 、 ϵ_{vas} 分别为净应力 p 和基质吸力 s 引起的液相、气相部分的应变,其相对应的比例系数为 $\alpha_1 = \epsilon_{vwp} / \epsilon_{vap} = m_1^w / m_1^a$, $\alpha_2 = \epsilon_{vws} / \epsilon_{vas} = m_2^w / m_2^a$ 。

在 BBM 模型中体应变以压缩为正,膨胀为负,因此由吸力引起的体应变按式(15)、式(16)取负值代入式(24)、式(25)。最终非饱和土的液相、气相控制方程可分别由式(26)、式(27)表示。

$$\frac{k_w}{\gamma_w} \nabla^2 u_w = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \frac{\partial \epsilon_{vp}}{\partial t} - \frac{\alpha_2}{(1 + \alpha_2)(s + p_{at})} \left[\frac{\kappa_s}{v} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\lambda_s - \kappa_s}{v} \frac{\partial s_c}{\partial t} \right] \quad (26)$$

$$\frac{1}{1 + \alpha_1} \frac{\partial \epsilon_{vp}}{\partial t} + \frac{1}{1 + \alpha_2} \frac{\partial \epsilon_{vs}}{\partial t} = \nabla^2 u_a - \frac{\bar{u}_a^0 n_0 (1 - S_{r0})}{\bar{u}_a^2} \frac{\partial u_a}{\partial t} \quad (27)$$

最终固结方程基于孔隙水压力 u_w 、孔隙气压力 u_a 、净应力引起的体积应变 ϵ_{vp} 及吸力引起的体积应变 ϵ_{vs} 四个主变量构建。使用 COMSOL 多物理场软件的固体力学模块与一般形式偏微分方程模块耦合,建立非饱和土固结全耦合数值模型,实现不同荷载大小及加载宽度条件下超静孔隙压力分布特征与消散规律的模拟分析。

2 数值模型及参数

2.1 非饱和土二维固结模型

采用的非饱和土二维固结模型如图 1 所示。因为几何模型、荷载在 x 方向均是对称的,只取一半的模型进行计算分析。模型水平方向的非饱和土体宽度为 $l=5$ m, 竖直方向的非饱和土体厚度为 $h=10$ m。瞬时均布荷载 q_0 作用于土体顶部,加载宽度为 w 。瞬时加载下,超静孔隙水压力和超静孔隙气压力会从水平(x 轴)、竖直(z 轴)两个方向同时进行消散。

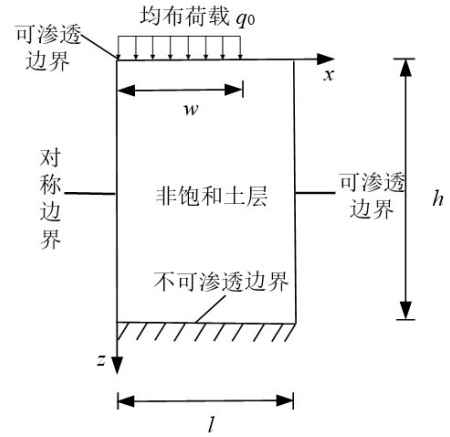


图 1 单层非饱和土二维计算模型

Fig. 1 2D calculation model of single-layer unsaturated soil

2.2 边界条件和初始条件

实际模型土体两侧以及顶面都为可渗透边界,底面为不可渗透边界,对称边界为不可渗透边界。边界条件见式(28)~式(31)。

上边界:

$$u_w(x, 0, t) = 0; u_a(x, 0, t) = 0 \quad (28)$$

下边界:

$$\partial u_w(x, h, t) / \partial z = 0; \partial u_a(x, h, t) / \partial z = 0 \quad (29)$$

右边界:

$$u_w(l, z, t) = 0, u_a(l, z, t) = 0 \quad (30)$$

对称边界:

$$\partial u_w(0, z, t) / \partial z = 0; \partial u_a(0, z, t) / \partial z = 0 \quad (31)$$

初始条件为瞬时施加荷载后($t=0$)非饱和土中产生的超静孔隙压力空间分布。文中采用模拟方法来确定初始条件,具体方法:瞬时加载按外部荷

载由 0 在很短的时间内(取 0.1 s)线性增加至设计值来模拟,模型的所有边界设为不渗透边界,模拟瞬时加载条件下,孔隙流体来不及排出的情况,再将模拟得到的超静孔隙压力空间分布作为初始条件。

2.3 土体参数

非饱和土固结理论中涉及的参数包括体积变化系数与土体相关参数,非饱和土固结相关研究中参数取值参照文献[5]和文献[22]。

其中体积变化系数的取值: $m_1^s = -2.5 \times 10^{-4} \text{ kPa}^{-1}$, $m_1^w = -0.5 \times 10^{-4} \text{ kPa}^{-1}$, $m_2^s = -1 \times 10^{-4} \text{ kPa}^{-1}$, $m_2^w = -2 \times 10^{-4} \text{ kPa}^{-1}$;

土体相关参数取值: $p_{at} = 101.3 \text{ kPa}$, $n_0 = 50\%$, $T = 293.16 \text{ K}$, $S_r = 80\%$, $k_{wx} = k_{wz} = 10^{-10} \text{ m/s}$, $k_{ax} = k_{az} = 10^{-8} \text{ m/s}$, $\gamma_w = 9.8 \text{ kN/m}^3$ 。

BBM 模型中参数取值: $k = 0.6$, $\lambda(0) = 0.2$, $\kappa = 0.02$, $r = 0.75$, $\lambda_s = 0.08$, $\beta = 12.5 \text{ MPa}^{-1}$, $\kappa_s = 0.008$, $p^c = 0.10 \text{ MPa}$, $G = 10 \text{ MPa}$, $M = 1$ 。

2.4 数值模型验证

为验证数值模型的合理性,选取文献[23]中考虑非饱和土弹塑性的二维固结算例,结果如图 2 所示。由于文献未明确给出算例土体的具体参数取值,无法进行 u_{w0} 数值比较,但从超静孔隙水压力的分布规律来看,本文解与文献结果的变化趋势基本一致,间接验证了数值模型的合理性。

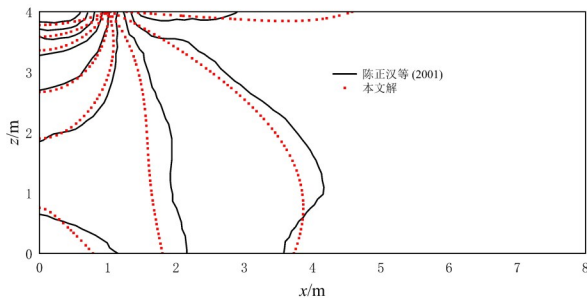


图 2 98 kPa 下初始超静孔隙水压力分布等值线 ($t=0 \text{ s}$)

Fig. 2 Contour lines of initial excess pore water pressure distribution under 98 kPa ($t = 0 \text{ s}$)

3 超静孔隙压力分布及消散规律

进一步分析发现,超静孔隙水、气压力分布及消散规律相似,因此只研究超静孔隙水压力的分布与消散规律。

3.1 加载宽度对初始超静孔隙压力分布的影响

3.1.1 土体仅发生弹性变形

取 $q_0 = 50 \text{ kPa}$, 瞬时加载时,土体只发生弹性变形,取 $w = 2, 3, 4, 5 \text{ m}$, 其他参数不变,并将土体四

周设置为完全不渗透边界,研究不同加载宽度下初始超静孔隙水压力 u_{w0} 的空间分布。

图 3 为满布荷载 $w = 5 \text{ m}$ 和局部荷载 $w = 3 \text{ m}$ 时 u_{w0} 的平面分布图;满布荷载时, u_{w0} 在土体内均匀分布,而局部荷载时,荷载作用范围下方土体内的 u_{w0} 为正,荷载作用范围以外地表以下一定范围则出现负值 u_{w0} (见图 3(b) 右上角白色区域),因此,取加载中心 ($x = 0 \text{ m}$) 和土体边缘 ($x = 5 \text{ m}$) 两个位置分析局部荷载下 u_{w0} 沿深度的分布规律。

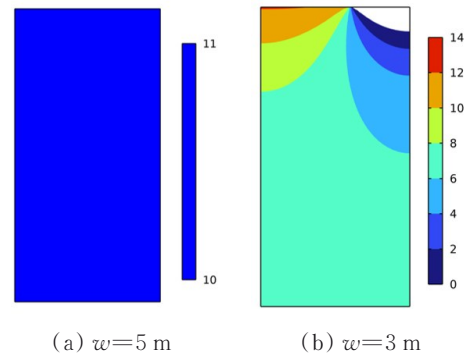


图 3 初始超静孔隙水压力平面分布图 ($q_0 = 50 \text{ kPa}$)

Fig. 3 Plane distribution of initial excess pore water pressure ($q_0 = 50 \text{ kPa}$)

图 4 为 $q_0 = 50 \text{ kPa}$ 时,不同加载宽度下两个位置处初始超静孔隙水压力 u_{w0} 沿深度的分布图。图 4(a) 为加载中心 ($x = 0 \text{ m}$) 处的 u_{w0} 的分布图,满布荷载时, u_{w0} 沿深度均匀分布;文献[24]给出满布荷载下 u_{w0} 和 u_{a0} 理论计算公式,将此处模拟得出的 u_{w0} 和 u_{a0} 代入文献[24]的公式,发现模拟结果与理论计算结果相匹配。由于局部荷载的应力集中效应,局部荷载下 u_{w0} 峰值出现在土体表面且大于满布荷载时的 u_{w0} , $0 \sim 5 \text{ m}$ 深度内, u_{w0} 沿深度逐渐减小,加载宽度越大, u_{w0} 峰值越小,同时 u_{w0} 沿深度的变化速率也越小, 5 m 以下深度内的 u_{w0} 基本不再变化。

图 4(b) 为土体边缘 ($x = 5 \text{ m}$) 处初始超静孔隙水压力 u_{w0} 随深度的变化。从图中可以看出,当加载宽度由 4 m 变化到 2 m ,负超静孔隙水压力分布深度由 0.5 m 变化到 1 m ,大小由 -4 kPa 变化到 -2 kPa ,即加载宽度越小,负 u_{w0} 分布深度越深,绝对值越小。产生负超静孔隙水压力的原因是加载区域土体由于承受荷载而发生压缩变形,对周围土体产生挤压作用,导致荷载作用范围外一定深度土体发生剪胀,从而产生了负超静孔隙水压力。

3.1.2 土体发生弹塑性变形

当荷载增加到 $q_0 = 150 \text{ kPa}$ 时,土体发生弹塑性变形,图 5 为满布荷载 $w = 5 \text{ m}$ 和局部荷载 $w = 3 \text{ m}$ 时初始超静孔隙水压力 u_{w0} 的平面分布图,与土体只

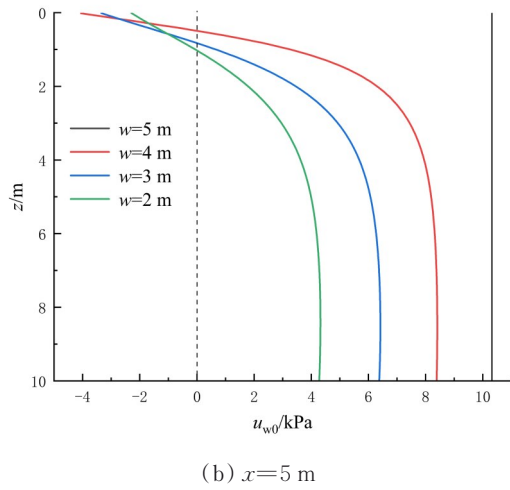
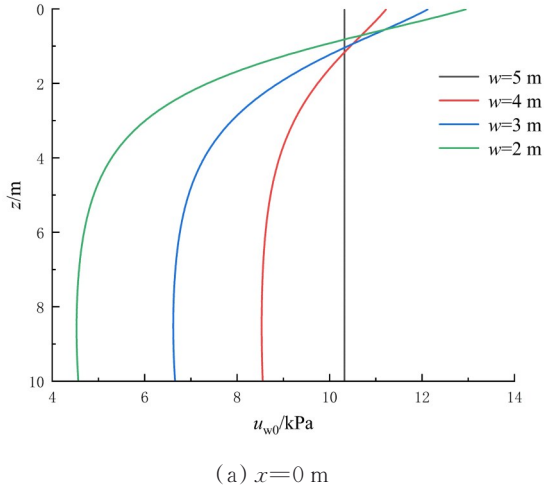


图 4 初始超静孔隙水压力随深度变化图 ($q_0=50$ kPa)

Fig. 4 Diagram of initial excess pore water pressure variation with depth ($q_0=50$ kPa)

发生弹性变形不同,满布荷载时土体整体发生塑性变形,且塑性变形沿深度逐渐增加,如图 5(a)所示, u_{w0} 也随深度逐渐增加;如图 5(b)所示,局部荷载时地表以下到虚线 I 区域以及基底以上到虚线 II 区域的两处土体均发生塑性变形,地表以下浅层土体内的塑性变形随深度逐渐减小, u_{w0} 也随深度减小,基底以上深层土体内的塑性变形随深度增加, u_{w0} 也随深度增加。塑性区内的 u_{w0} 沿深度的变化规律与塑性压缩应变呈正相关。

瞬时荷载是在极短的时间 (0.1 s) 内被迅速施加于土体表面,在加载结束后,土体内部的应力在瞬间攀升至峰值,使土体内部的应力状态进入塑性区,从而产生了塑性变形。图 6 为荷载 $q_0=150$ kPa、加载宽度 $w=3$ m、加载中心 ($x=0$ m)、土体深度 $z=2$ m 和 $z=8$ m 处,初始状态以及加载完成后两个状态下的应力点在相应的 p - q 屈服面上的位置。

根据应力路径分析结果,土体初始应力状态在 p - q 应力平面与 p - s 应力平面上均处于弹性区域,而

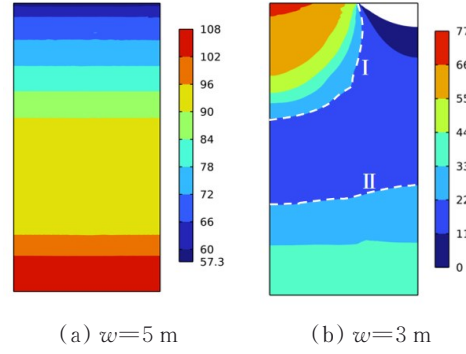


图 5 初始超静孔隙水压力平面分布图 ($q_0=150$ kPa)

Fig. 5 Plane distribution of initial excess pore water pressure ($q_0=150$ kPa)

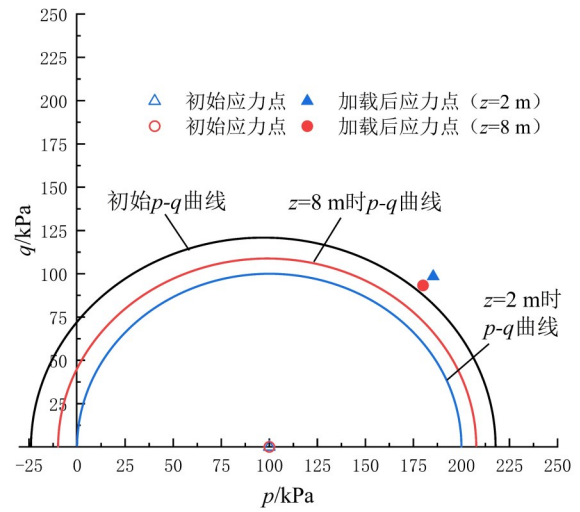


图 6 土中一点的应力状态 ($q_0=150$ kPa, $w=3$ m)

Fig. 6 Stress state of a point in the soil. ($q_0=150$ kPa, $w=3$ m)

加载后两个不同深度对应的应力点都超出了相应的 p - q 应力平面的屈服边界,故土体发生了塑性变形。

图 7 为两个位置处初始超静孔隙水压力 u_{w0} 沿深度分布图。图 7(a)为加载中心 ($x=0$ m) 处的 u_{w0} 沿深度的分布图。 $w=2$ m 时, $z=0-2.5$ m, 塑性变形沿深度逐渐减小, u_{w0} 随深度显著减小, $z>2.5$ m, 土体仅发生弹性变形, u_{w0} 沿深度基本不变; $w=3$ m 时, $z=0-4$ m, 塑性变形沿深度减小, u_{w0} 随深度显著减小, $z>6.5$ m, 塑性变形沿深度增加, u_{w0} 也随深度逐渐增加, $z=4-6.5$ m, 土体仅发生弹性变形, u_{w0} 基本不变; $w=4$ m 时, 土体整体发生塑性变形, $z=0-3.5$ m 时, 塑性变形沿深度减小, u_{w0} 也随深度逐渐减小, $z>3.5$ m 时, 塑性变形沿深度增加, u_{w0} 也随深度增加; $w=5$ m 时, 土体整体发生塑性变形, u_{w0} 随深度增加。分析可知,土体塑性变形与 u_{w0} 沿深度的变化规律具有一致性,土体有两种塑性应变,一种由地表向下扩展,沿深度逐渐减小,一种由基底向上扩展,沿深度逐渐增大,当两个塑性区发生贯通后,

基底处的塑性变形在影响 u_{w0} 的分布中占主导因素。模拟结果显示,土体产生的塑性应变是由净应力 p 引起,由式(25)、式(26)可以发现,当塑性变形逐渐增大时, u_w 也不断增加。

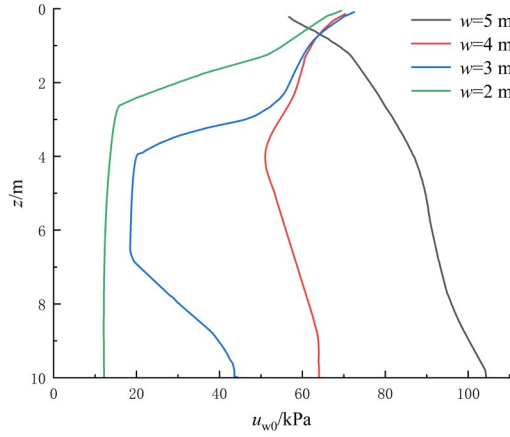
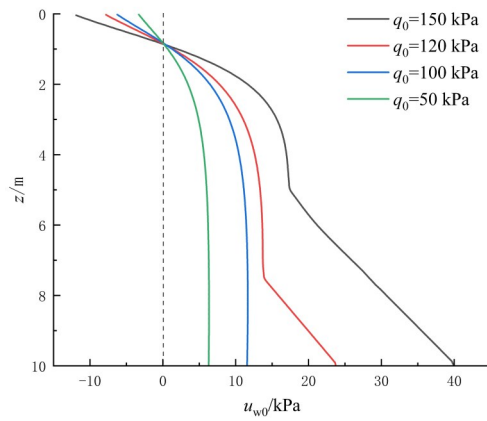
(a) $x=0$ m(b) $x=5$ m图7 初始超静孔隙水压力随深度变化图 ($q_0=150$ kPa)Fig. 7 Diagram of initial excess pore water pressure variation with depth ($q_0=150$ kPa)

图7(b)为土体边缘($x=5$ m)处 u_{w0} 沿深度分布图, u_{w0} 沿深度逐渐增加。由图可以看出,当加载宽度由4 m变化到2 m,负 u_{w0} 分布深度由0.5 m变化到1 m,负 u_{w0} 的绝对值由14.7 kPa变化到6.8 kPa,即加载宽度 w 越小,负 u_{w0} 分布深度越深,绝对值也越小; $w=4$ m, $z=3\sim4.5$ m 时土体处于弹性区与塑性区交界处,且两种塑性区发生贯通导致此处塑性变形变化速率很大, u_{w0} 变化速率也很大; $w=4$ m, $z>4.5$ m 以及 $w=3$ m, $z>5$ m 时,塑性变形由基底向上扩展,沿深度逐渐增大, u_{w0} 逐渐增加。

3.2 荷载大小对初始超静孔隙压力分布的影响

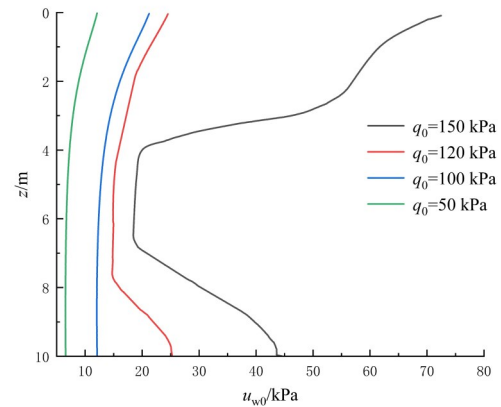
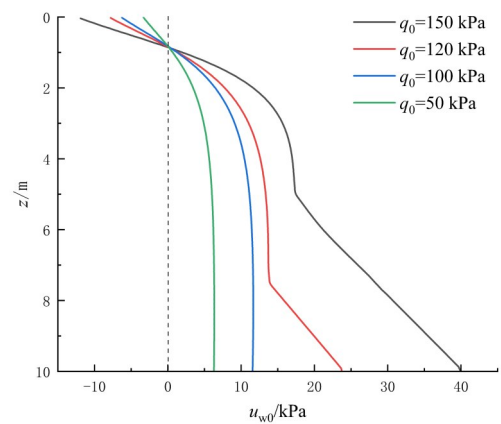
以加载宽度 $w=3$ m 为例,研究荷载大小对初始超静孔隙水压力 u_{w0} 分布影响。图8展示了加载宽度为 $w=3$ m 时,不同荷载下,加载中心和土体边

缘两个位置处初始孔隙水压力 u_{w0} 沿深度的分布图。

图8(a)为加载中心($x=0$ m)处的 u_{w0} 分布图。由图8(a)可以发现,荷载越大,产生的 u_{w0} 越大。荷载 $q_0=50, 100$ kPa 时,土体只发生弹性变形, $z=0\sim4$ m, u_{w0} 随深度逐渐减小, $z>4$ m, u_{w0} 沿深度基本不变;荷载 $q_0=120$ kPa 时, $z<7.5$ m, 土体仅发生弹性变形, $z>7.5$ m, 塑性应变沿深度逐渐增加, u_{w0} 也沿深度逐渐增加;荷载 $q_0=150$ kPa 时, $z=0\sim4$ m, 塑性应变沿深度逐渐减小, u_{w0} 随深度逐渐减小,且比只发生弹性应变时的变化速率显著增大, $z=4\sim6.5$ m, 土体仅发生弹性变形, u_{w0} 沿深度基本不变, $z>6.5$ m 时, u_{w0} 沿深度逐渐增加。荷载越大,由基底向上扩展的塑性应变分布范围越大。

图8(b)为土体边缘($x=5$ m)处的 u_{w0} 分布图。加载宽度 $w=3$ m 时,土体边缘处负 u_{w0} 分布深度均为0.85 m,说明荷载大小不影响土体边缘处负 u_{w0} 的分布深度,荷载越大,产生的负 u_{w0} 的绝对值越大。

综合分析数值结果可以发现,瞬时荷载下非饱

(a) $x=0$ m(b) $x=5$ m图8 $w=3$ m 不同荷载下初始超静孔隙水压力随深度变化图Fig. 8 The variation of initial excess pore water pressure under different loads with depth when $w=3$ m

和土超静孔隙水压力 u_{w0} 的分布规律与土体发生的应变类型有关。随荷载的逐步增加,满布荷载时,基底处的土体先发生塑性变形,并向上扩展;局部加载下,同样是基底处的土体先发生塑性变形,随荷载进一步增加,地表以下土体也发生塑性变形,且逐渐向下扩展。由基底向上发展的塑性区使该区域内 u_{w0} 沿深度递增,从地表向下扩展的塑性区则使 u_{w0} 沿深度显著减小,当两种塑性区发生贯通时,由基底处产生的塑性应变在影响 u_{w0} 的分布中占主导因素, u_{w0} 沿深度呈递增趋势。

3.3 超静孔隙压力消散规律

在模型上表面施加 q_0 分别为 50、100、120、150 kPa 的荷载,研究超静孔隙水压力 u_w 在加载宽度 w 分别为 5、4、3、2 m 时随时间的消散规律。分析发现, u_w 的消散规律同样与地基土发生的应变类型有关,为此首先分析得出不同荷载与加载宽度下,地基土内塑性区深度范围,如表 1 所示。

表 1 不同情况下地基土塑性区深度范围

Table 1 Soil that produces plastic deformation

w/m	$q_0=50$ kPa	$q_0=100$ kPa	$q_0=120$ kPa	$q_0=150$ kPa
5		4.70~10	3.20~10	0~10.00
4		6.60~10	4.75~10	0~10.00
3			7.61~10	0~4.34 6.63~10
2				0~2.63

将地基土中的应力状态分为弹性区、塑性区以及弹塑性交界区,取荷载 $q_0=100$ kPa,加载宽度 $w=4$ m, $z=4.6$ 、6.6、8.6 m 三个深度来分别对应弹性区、弹塑性交界区以及塑性区 3 种区域,分析超静孔隙水压力 u_w 随时间的消散规律,其消散曲线如图 9 所示。

分析发现,土体发生弹性变形时($z=4.6$ m), u_w 消散随时间单调递减,而在弹塑性交界处, u_w 消散

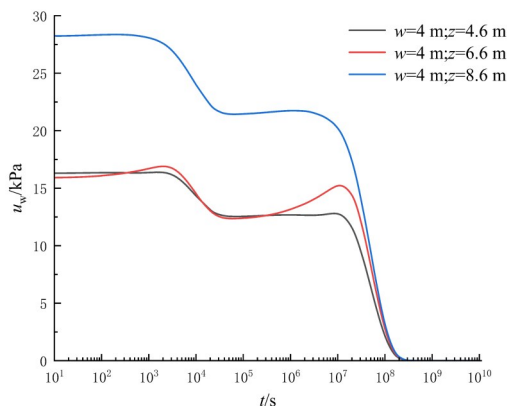


图 9 100 kPa 下加载中心处孔隙水压力随时间变化图

Fig. 9 The variation of pore water pressure at the loading center with time at 100 kPa

期间会出现两次短暂增加的现象,这是因为产生了曼代尔-克雷尔效应。

第 1 次曼代尔-克雷尔效应是在固结的开始段,分析数值结果发现, u_a 、 u_w 同时增加,而总应力和吸力不变,结合式 (27) 分析,此时由净应力 p 和吸力 s 引起的应变很小,因此 u_a 随时间的变化受 $\nabla^2 u_a$ 控制;图 9 显示在 $t=1.9 \times 10^3$ s 时,孔隙压力第 1 次达到峰值,此时 $\nabla^2 u_a$ 沿深度的变化如图 10 所示,从图中可以看出,在 $z=6.6$ m 附近深度范围,即弹塑性交界区, $\nabla^2 u_a > 0$,由于此时式 (27) 中 $\partial u_a / \partial t$ 主要受 $\nabla^2 u_a$ 决定,故此时 $\partial u_a / \partial t > 0$,即 u_a 随时间 t 增加,同样地, u_w 随时间 t 增加,形成第一次曼代尔-克雷尔效应。

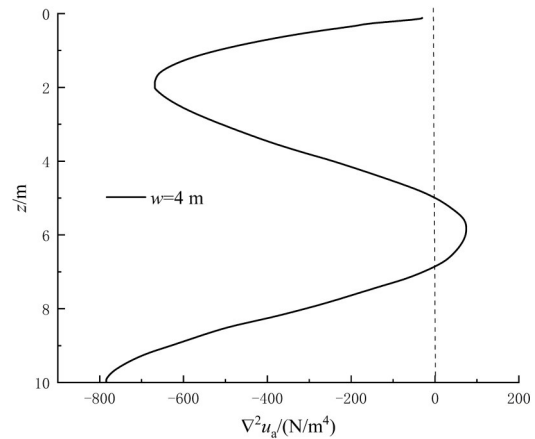


图 10 100 kPa 下 $\nabla^2 u_a$ 随深度变化图

Fig. 10 The variation of $\nabla^2 u_a$ with depth at 100 kPa

u_a 消散结束后,土体内部气相压力 $u_a=0$, u_w 的消散主要受边界条件影响,当边界条件的影响未到达该处时, u_w 不会发生变化,形成消散平台期。待边界的影响发展至该处时, u_w 又开始发生变化,平台期结束,由于上层土体持续排水,上层土体排水产生体积收缩挤压下部土体,使其应力增大, u_w 也随之增加,出现了第 2 次曼代尔-克雷尔效应。

4 结论

基于 Fredlund 非饱和土固结理论,并结合 BBM 弹塑性本构模型,建立了一个考虑弹塑性变形的非饱和土耦合固结理论模型,采用 COMSOL 多物理场耦合软件建立数值模型,对局部瞬时加载下二维非饱和土地基超静孔隙压力分布及消散问题进行研究,得到如下结论:

1) 初始超静孔隙水压力 u_{w0} 空间分布规律与地基土体积应变有关;仅发生弹性变形时,在荷载作用宽度内, u_{w0} 沿深度递减,靠近地表处 u_{w0} 变化率更大,一定深度后 u_{w0} 基本不再变化;荷载作用宽度外

浅层土体会出现负值 u_{w0} ; 发生弹塑性变形时, 塑性体积应变显著影响 u_{w0} 大小, 塑性区内 u_{w0} 显著大于弹性区内, 且 u_{w0} 与塑性压缩体积应变呈正相关。

2) 加载宽度 w 影响 u_{w0} 的分布: 仅发生弹性变形时, w 越大, 地表 u_{w0} 峰值越小, 沿深度衰减速率越缓, 负 u_{w0} 分布深度越浅、绝对值越大; 发生弹塑性变形时, w 增加会促使基底塑性区向上发展, 且该塑性区内 u_{w0} 沿深度递增。

3) 荷载大小影响塑性区与 u_{w0} 的分布: 荷载增大产生塑性变形时, 荷载增加, 地表浅层塑性区向下扩展、塑性区内的 u_{w0} 沿深度逐渐减小、负 u_{w0} 的绝对值越大, 但分布深度不变; 荷载增加也会促使基底塑性区向上延伸, 两种塑性区贯通时, 基底塑性区在影响 u_{w0} 的分布中占主导因素, u_{w0} 沿深度呈增加趋势。

4) 超静孔隙水压力 u_w 消散规律与土体应变类型相关: 弹性区域 u_w 随时间单调递减; 弹塑性交界区域 u_w 消散会出现两次曼代尔-克雷尔效应。

参考文献

- [1] 李盾. 半渗透边界条件下非饱和土二维固结特性分析[D]. 长沙: 湖南大学, 2019.
LI D. Analysis on two-dimensional consolidation process of unsaturated soil under semi-permeable boundary conditions [D]. Changsha: Hunan University, 2019. (in Chinese)
- [2] 陈仲颐, 周景星, 王洪瑾. 土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994.
CHEN Z Y, ZHOU J X, WANG H J. Soil mechanics [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1994. (in Chinese)
- [3] FREDLUND D G, MORGENSTERN N R. Constitutive relations for volume change in unsaturated soils [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1976, 13(3): 261-276.
- [4] FREDLUND D G, RAHARDJO H. Soil Mechanics for Unsaturated Soils [M]. New York: Wiley, 1993.
- [5] FREDLUND D G, HASAN J U. One-dimensional consolidation theory: Unsaturated soils [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1979, 16(3): 521-531.
- [6] 沈珠江. 非饱和土简化固结理论及其应用[J]. 水利水运工程学报, 2003(4): 1-6.
SHEN Z J. Simplified consolidation theory for unsaturated soils and its application [J]. Hydro-Science and Engineering, 2003(4): 1-6. (in Chinese)
- [7] 秦爱芳, 陈光敬, 谈永卫, 等. 非饱和土层一维固结问题的解析解[J]. 应用数学和力学, 2008, 29(10): 1208-1218.
QIN A F, CHEN G J, TAN Y W, et al. Analytical solution to one-dimensional consolidation in unsaturated soils [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2008, 29(10): 1208-1218. (in Chinese)
- [8] 秦爱芳, 郑青青, 江良华. 统一边界条件下非饱和土一维固结理论研究[J]. 工程力学, 2024, 41(3): 63-72.
QIN A F, ZHENG Q Q, JIANG L H. Study on one-dimensional consolidation theory of unsaturated soil with general boundary conditions [J]. Engineering Mechanics, 2024, 41(3): 63-72. (in Chinese)
- [9] 周万欢, 赵林爽. 复杂初始和边界条件对一维非饱和土固结的影响[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(增刊 1): 305-311.
ZHOU W H, ZHAO L S. Influence of initial and boundary conditions on one-dimensional consolidation of unsaturated soil [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(Sup 1): 305-311. (in Chinese)
- [10] ZHOU W H, ZHAO L S. One-dimensional consolidation of unsaturated soil subjected to time-dependent loading with various initial and boundary conditions [J]. International Journal of Geomechanics, 2014, 14(2): 291-301.
- [11] HO L, FATAHI B. Analytical solution to axisymmetric consolidation of unsaturated soil stratum under equal strain condition incorporating smear effects [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2018, 42(15): 1890-1913.
- [12] 朱合华, 刘国彬, 梁发云. 岩土力学的数值分析方法和理论 [M]. 北京: 人民交通出版社, 2007.
ZHU H H, LIU G B, LIANG F Y. Numerical analysis methods and theories of geomechanics [M]. Beijing: China Communications Press, 2007. (in Chinese)
- [13] 吴意谦, 朱彦鹏. 考虑疏干带非饱和土影响下基坑降水引起地面沉降的计算[J]. 工程力学, 2016, 33(3): 179-187.
WU Y Q, ZHU Y P. Calculation of settlement considering unsaturated soil influence on the dewatering of foundation pits [J]. Engineering Mechanics, 2016, 33(3): 179-187. (in Chinese)
- [14] 叶梓, 艾智勇. 变荷载下层状非饱和土地基全耦合固结特性研究[J]. 岩土力学, 2021, 42(1): 135-142.
YE Z, AI Z Y. Fully-coupled consolidation characteristics of layered unsaturated soils subjected to varying loadings [J]. Rock and Soil Mechanics, 2021, 42(1): 135-142. (in Chinese)
- [15] LO W, BORJA R I, DENG J H, et al. Poroelastic theory of consolidation for a two-layer system with an upper unsaturated soil and a lower saturated soil under fully permeable boundary conditions [J]. Journal of Hydrology, 2021, 596: 125700.
- [16] 刘松玉. 特殊土与地区性地基 [M]. 北京: 科学出版社, 2017.
LIU S Y. Special soils and regional foundations [M]. Beijing: Science Press, 2017. (in Chinese)
- [17] 胡小荣, 蔡晓锋, 李春博, 等. 正常固结非饱和黏性土

的三剪弹塑性本构模型[J]. 工程力学, 2022, 39(1): 164-174.

HU X R, CAI X F, LI C B, et al. Triple-shear elastoplastic constitutive models of unsaturated clays in normal consolidation [J]. Engineering Mechanics, 2022, 39(1): 164-174. (in Chinese)

[18] SHWAN B J. Microstructural interpretation of effective stress equations for unsaturated sands [J]. International Journal of Geo-Engineering, 2023, 14(1): 4.

[19] NIU J J, LING D S, ZHU S, et al. Solutions for one-dimensional consolidation of unsaturated soil with general boundary conditions subjected to time-dependent load [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2021, 45(11): 1664-1680.

[20] HUANG M H, ZHAO M H. A general analytical solution for one dimensional consolidation of unsaturated soil incorporating impeded drainage boundaries [J]. Computers and Geotechnics, 2020, 128: 103801.

[21] 凌道盛, 赵天浩, 钮家军, 等. 混合非齐次边界下非饱和土一维固结解析解[J]. 岩土力学, 2021, 42(4): 883-891, 920.

LING D S, ZHAO T H, NIU J J, et al. Analytical solutions for 1D consolidation of unsaturated soils with mixed nonhomogeneous boundary conditions [J]. Rock and Soil Mechanics, 2021, 42(4): 883-891, 920. (in Chinese)

[22] ALONSO E E, GENS A, JOSA A. A constitutive model for partially saturated soils [J]. Géotechnique, 1990, 40(3): 405-430.

[23] 陈正汉, 黄海, 卢再华. 非饱和土的非线性固结模型和弹塑性固结模型及其应用[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(1): 93-103.

CHEN Z H, HUANG H, LU Z H. Non-linear and elastoplasticity consolidation models of unsaturated soil and applications [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2001, 22(1): 93-103. (in Chinese)

[24] 刘洋. 非饱和土二维平面应变固结特性的解析研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2022.

LIU Y. Analytical analysis of two-dimensional plane strain consolidation characteristics for unsaturated soil [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2022. (in Chinese)

附录 A:

采用的 Fredlund 非饱和土固结方程^[5]见正文式(1)、式(2), BBM 非饱和土弹塑性本构模型相关方程^[22]见正文式(9)~式(16)。

Fredlund 用两种应力状态变量表示土中三相体积变化。

土体的体积变化为

$$\epsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = m_1^s d(\sigma - u_a) + m_2^s d(u_a - u_w) \quad (A1)$$

水体体积变化

$$\epsilon_{vw} = \frac{\Delta V_w}{V} = m_1^w d(\sigma - u_a) + m_2^w d(u_a - u_w) \quad (A2)$$

气体体积变化

$$\epsilon_{va} = \frac{\Delta V_a}{V} = m_1^a d(\sigma - u_a) + m_2^a d(u_a - u_w) \quad (A3)$$

BBM 非饱和土弹塑性本构模型为描述塑性应变增量的方向和大小, 引入非关联的流动性法则, 将总的体积应变分为由净应力引起的塑性与弹性体积应变组成的总的体积应变以及由吸力引起的总的体积应变, 如式(A4)、式(A5)所示。

$$d\epsilon_{vp} = d\epsilon_{vp}^p + d\epsilon_{vp}^e = \frac{\lambda(s)}{v} \frac{dp_0}{p_0} \quad (A4)$$

$$d\epsilon_{vs} = \frac{\lambda_s}{v} \frac{ds}{(s + p_{at})} \quad (A5)$$

文献[8]中提出的将液相、气相的变化量用孔隙水、孔隙气的变化量表示。

$$\frac{\partial \epsilon_{vw}}{\partial t} = \frac{k_w}{\gamma_w} \nabla^2 u_w \quad (A6)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{va}}{\partial t} = \frac{k_a RT}{g \bar{u}_a^0 \omega_a} \nabla^2 u_a - \frac{\bar{u}_a n_0 (1 - S_{r0})}{\bar{u}_a^2} \frac{\partial u_a}{\partial t} \quad (A7)$$

为研究液相、气相对体积应变的影响, 本文将净平均应力和吸力引起的应变分为气相、液相两部分应变, 分别将总应变 ϵ_v 、净应力引起的应变 ϵ_{vp} 和吸力引起的应变 ϵ_{vs} 分为气相、液相两部分的应变, 其比例关系仍遵循 Fredlund 提出的体积变化系数。

$$\begin{cases} \epsilon_v = \epsilon_{vp} + \epsilon_{vs} \\ \epsilon_{vp} = \epsilon_{vwp} + \epsilon_{vap} \\ \epsilon_{vs} = \epsilon_{vws} + \epsilon_{vas} \end{cases} \quad (A8)$$

$$\epsilon_{vwp} / \epsilon_{vap} = m_1^w / m_1^a = \alpha_1 \quad (A9)$$

$$\epsilon_{vws} / \epsilon_{vas} = m_2^w / m_2^a = \alpha_2 \quad (A10)$$

则液相、气相部分的应变分别为

$$\epsilon_{vw} = \epsilon_{vwp} + \epsilon_{vws} = \frac{\alpha_1 \epsilon_{vp}}{1 + \alpha_1} + \frac{\alpha_2 \epsilon_{vs}}{1 + \alpha_2} \quad (A11)$$

$$\epsilon_{va} = \epsilon_{vap} + \epsilon_{vas} = \frac{\epsilon_{vp}}{1 + \alpha_1} + \frac{\epsilon_{vs}}{1 + \alpha_2} \quad (A12)$$

分别对 t 求导可得

$$\frac{\partial \epsilon_{vw}}{\partial t} = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \frac{\partial \epsilon_{vp}}{\partial t} + \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \frac{\partial \epsilon_{vs}}{\partial t} \quad (A13)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{va}}{\partial t} = \frac{1}{1 + \alpha_1} \frac{\partial \epsilon_{vp}}{\partial t} + \frac{1}{1 + \alpha_2} \frac{\partial \epsilon_{vs}}{\partial t} \quad (A14)$$

将式(A4)~式(A6)代入式(A12)可得液相控制方程

$$\frac{k_w}{\gamma_w} \nabla^2 u_w = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \frac{\partial \epsilon_{vp}}{\partial t} - \frac{\alpha_2}{(1 + \alpha_2)(s + p_{at})} \left[\frac{\kappa_s}{v} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\lambda_s - \kappa_s}{v} \frac{\partial s_c}{\partial t} \right] \tag{A15}$$

$$\frac{1}{1 + \alpha_1} \frac{\partial \epsilon_{vp}}{\partial t} + \frac{1}{1 + \alpha_2} \frac{\partial \epsilon_{vs}}{\partial t} = \nabla^2 u_a - \frac{\bar{u}_a^0 n_0 (1 - S_{r0})}{\bar{u}_a^2} \frac{\partial u_a}{\partial t} \tag{A16}$$

将式(A4)、(A5)和(A7)代入式(A13)可得气相控制方程

(编辑 XXX)